

Akademia Pedagogiczna w Krakowie  
Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny  
Fizyka IV rok

Piotr Stefańczyk

# **Oszacowanie masy supermasywnej czarnej dziury wewnątrz Drogi Mlecznej**

The ESA/ESO Astronomical Exercise Series  
„The mass of the black hole at centre of our Milky Way”

Kraków 2007

# Spis treści

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Wstęp .....</b>   | <b>3</b>  |
| <b>I. Nasza Galaktyka.....</b>   | <b>4</b>  |
| <b>II. Czarne dziury i supermasywne czarne dziury w teorii .....</b>   | <b>12</b> |
| Pierwsze hipotezy istnienia czarnych dziur .....   | 12        |
| Własności czarnych dziur.....  | 13        |
| Czarne dziury jako ostatni etap ewolucji gwiazd.....   | 16        |
| Ruch materii i światła w pobliżu czarnej dziury .....  | 17        |
| <b>III. Supermasywne czarne dziury – fakty obserwacyjne .....</b>  | <b>21</b> |
| Odkrycie kwazara 3C 273 .....  | 21        |
| Supermasywne czarne dziury w innych galaktykach.....   | 23        |
| Supermasywna czarna dziura w naszej Drodze Mlecznej .....  | 28        |
| <b>IV. Problem modelowania orbity gwiazdy obiegającej<br/>supermasywną czarną dziurę Drogi Mlecznej na podstawie<br/>danych otrzymanych przez teleskop ESO VLT .....</b> | <b>32</b> |
| Prawa Keplera .....  | 32        |
| Uogólnione prawa Keplera.....  | 33        |
| Oszacowanie masy supermasywnej czarnej dziury z wykorzystaniem arkusza<br>kalkulacyjnego Microsoft Excel.....  | 38        |
| <b>V. Wnioski i wyniki.....</b>  | <b>46</b> |
| <b>VI. Instrukcja .....</b>  | <b>50</b> |
| <b>Bibliografia .....</b>  | <b>52</b> |

# Wstęp

Kilka lat temu naukowcy dokonali zaskakującego odkrycia. Obserwując centrum naszej Galaktyki, a dokładnie radioźródło Sgr A\*, zauważyli, że gwiazdy i materia w tym miejscu poruszają się w sposób, który sugeruje istnienie ciała o ogromnej masie. Ciało to, według obliczeń, posiada masę kilku milionów mas Słońca. Nikt przedtem nie znał takiego ciała o tak ogromnej masie. Taka masa mogła sugerować istnienie czarnej dziury. Problem jednak w tym przypadku jest taki, że czarne dziury, które naukowcy wcześniej odkrywali miały masy o wiele mniejsze. Dało to początek nazwie „supermasywne czarne dziury”.

W niniejszej pracy mam za zadanie oszacować masę supermasywnej czarnej dziury w jądrze Drogi Mlecznej na podstawie ruchu gwiazdy wokół niej. Dane wejściowe, czyli współrzędne gwiazdy obiegającej masywniejszego towarzysza pochodzą z obserwacji obserwatorium ESO Very Large Telescope (VLT) w Chile na przełomie lat 1992-2003. Praca ta jest otwarciem nowego ćwiczenia dla Pracowni Astronomicznej Akademii Pedagogicznej w Krakowie i jest oparta na ćwiczeniu ESO Astronomical Exercise „The mass of the black hole at centre of our Milky Way”. Celem dydaktycznym pracy jest utrwalenie wiadomości na temat praw Keplera oraz własności orbit.

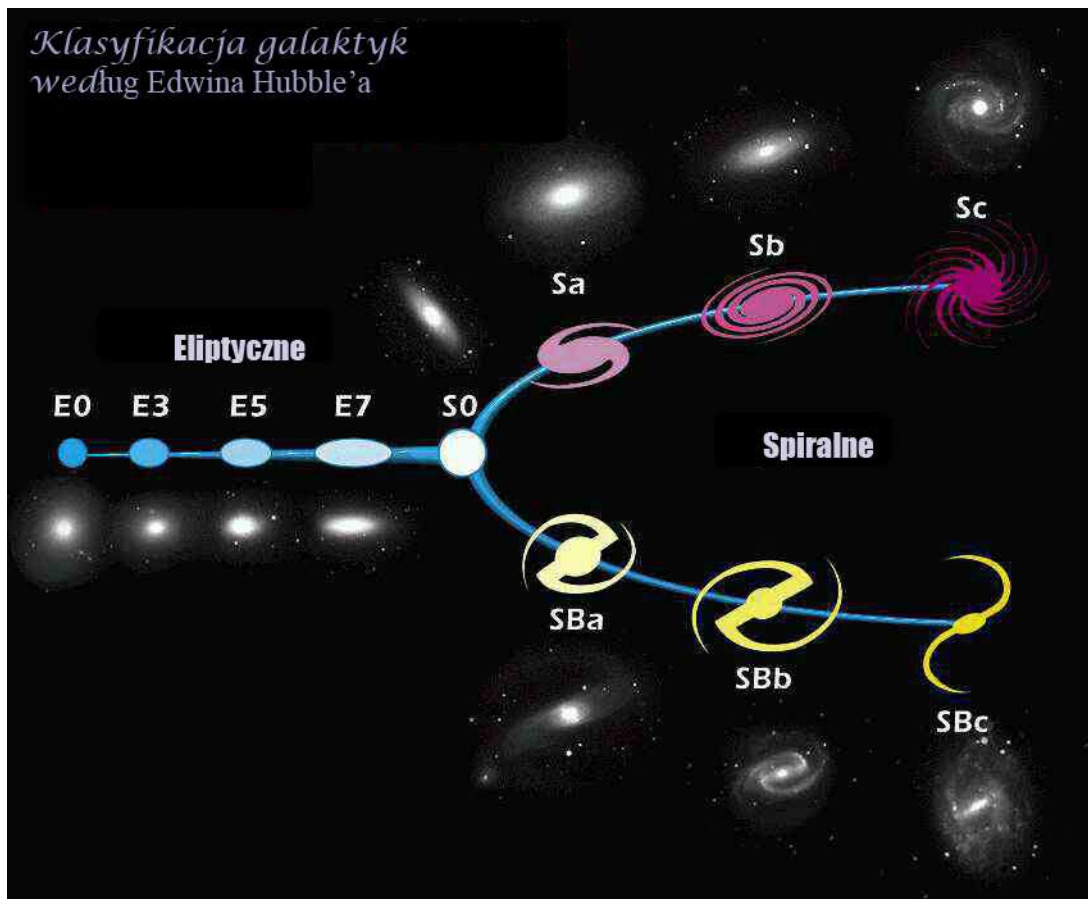
# I. Nasza Galaktyka

Astronomowie przypuszczają, że w większości jąder galaktyk, jak i, co udowodnione, w Drodze Mlecznej, znajdują się supermasywne czarne dziury. Dlatego zanim dojdziemy do omawiania czarnych dziur dowiedzmy się czym są galaktyki i jakie są ich typy.

Wraz ze swoją najbliższą gwiazdą – Słońcem, planetami, księżycami, jak również z innymi gwiazdami, znajdujemy się w galaktyce, na co dzień nazywanej Drogą Mleczną. Oprócz naszej Galaktyki jest również miliony, a może nawet miliardy innych galaktyk. Wszystkie te skupiska gwiazd (bo tym są właśnie galaktyki) układają się w gromady galaktyk.

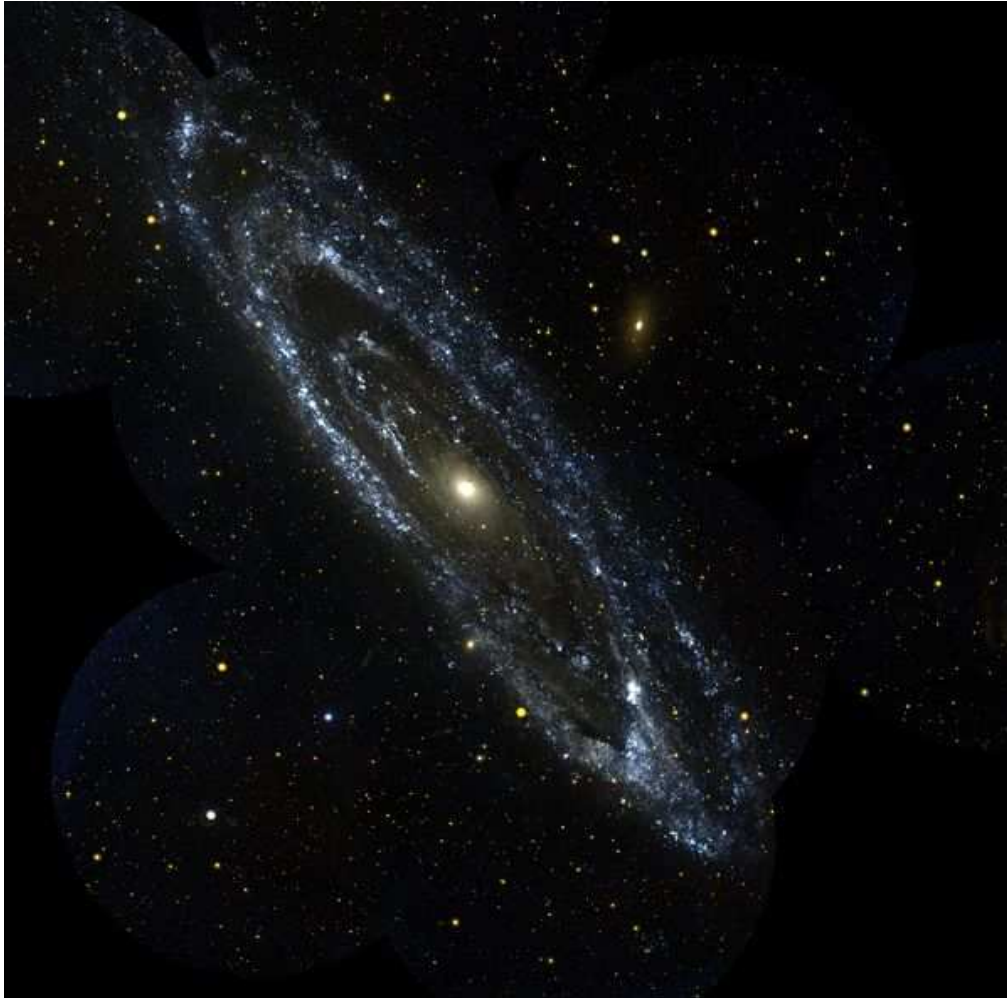
Galaktyki można rozróżnić ze względu na ich kształt. Klasyfikację tą zaproponował w 1926 roku znany astronom Edwin Hubble, po którym imię otrzymał Teleskop Kosmiczny Hubble'a (HST).

Wśród typów możemy wyróżnić trzy podstawowe: spiralne, eliptyczne, nieregularne oraz raczej rzadsze soczewkowate.



**Rys. 1 Klasyfikacja galaktyk według Edwina Hubble'a**  
 Źródło: [http://www.aik.magazyn.pl/art\\_show.php?art=gal&m=kosmos](http://www.aik.magazyn.pl/art_show.php?art=gal&m=kosmos)

Galaktyki spiralne możemy rozpoznać po charakterystycznych spiralach wychodzących z centralnej części galaktyki, czyli z jądra. Materia jest skupiona wokół płaszczyzny tworząc dysk o małej grubości. Dysk galaktyczny w większości zbudowany jest z gwiazd i w mniejszej ilości z materii międzygwiazdowej. Materia zawarta w dysku galaktycznym rotuje wokół środka galaktyki. Ruch tej materii jest uporządkowany, ponieważ prędkość liniowa rotacji jest stała. Największe zagęszczenie gwiazd i materii poza jądrem jest w spiralach, dlatego jest to miejsce narodzin nowych gwiazd. Przykładem galaktyki spiralnej może być chociażby nasza Droga Mleczna lub galaktyka M31 w Andromedzie.



**Rys 2. Galaktyka M31 w Andromedzie**

Źródło: [http://pl.wikipedia.org/wiki/Grafika:Andromeda\\_galaxy.jpg](http://pl.wikipedia.org/wiki/Grafika:Andromeda_galaxy.jpg)

W przypadku galaktyk eliptycznych nie obserwuje się spiral. Tak jak nazwa wskazuje galaktyka taka ma kształt elipsoidy obrotowej, tworząc dość jednorodną bryłę wraz z centralnym zagęszczeniem w postaci jądra galaktycznego. Gwiazdy w tych galaktykach nie układają się więc w jednej płaszczyźnie, jak ma to miejsce w galaktykach spiralnych lecz są rozmieszczone w przestrzeni ograniczonej elipsoidą obrotową. Są to galaktyki w większości zbudowane ze starych, chłodnych gwiazd o małej masie. Posiadają małą ilość materii międzygwiazdowej, a czasem nawet w ogóle ona nie występuje. Również i w tym przypadku materia rotuje wokół osi symetrii, ale w mniej

uporządkowany sposób jak ma to miejsce u galaktyk spiralnych. Ze względu na swój kształt, podczas obserwacji galaktyki te mogą być mylone czasem z UFO. Jednym z przykładów galaktyk eliptycznych jest galaktyka M32 w Andromedzie – satelita galaktyki M31.



**Rys 3. Galaktyka M32**

Źródło: [http://pl.wikipedia.org/wiki/Grafika:M32\\_hst\\_big.jpg](http://pl.wikipedia.org/wiki/Grafika:M32_hst_big.jpg)

Galaktyki nieregularne nie mają zbyt określonej symetrycznej budowy tak jak to ma miejsce w przypadku galaktyk spiralnych czy eliptycznych. Są to skupiska bez jakiegokolwiek charakterystycznego zagęszczenia. Kształtem przypominają obłoki. Zwykle takie galaktyki są mniejsze od pozostałych typów galaktyk i mają dość małą masę. Wśród nich można rozróżnić dwa podtypy: pierwszy to galaktyki nieregularne zbudowane prawie wyłącznie z gwiazd, oraz

drugi w którym oprócz gwiazd obserwuje się duże ilości materii międzygwiazdowej. Do typowym galaktyk nieregularnych należą dwie satelity naszej Galaktyki: Mały Obłok Magellana oraz Wielki Obłok Magellana, widziane tylko z półkuli południowej Ziemi.



**Rys 4. Wielki Obłok Magellana**

Źródło: <http://pl.wikipedia.org/wiki/Grafika:Large.mc.arp.750pix.jpg>

Ostatnim typem, dość ciekawym, są galaktyki soczewkowate. Ich kształt jest czymś pośrednim pomiędzy galaktykami spiralnymi oraz eliptycznymi. Zbudowane są z dwóch charakterystycznych części: rozciąglej części centralnej przypominającej dysk galaktyki spiralnej widziany z boku oraz z halo podobnego jak w przypadku galaktyk eliptycznych, lecz o znacznie mniejszej gęstości. Galaktyki takie zbudowane są ze starych gwiazd i są pozbawione materii międzygwiazdowej.





**Rys 5. NGC 5866 w gwiazdozbiorze Smoka**

Źródło: <http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/2006/24/images/a/formats/web.jpg>

Spośród wyżej wymienionych typów najczęściej występujące są galaktyki spiralne. W naszej grupie lokalnej galaktyk najbardziej masywna jest nasza Droga Mleczna, a największa galaktyka M31 w Andromedzie – obie są spiralne.

Droga Mleczna jest jedną z typowych galaktyk spiralnych. Składa się więc ona z dwóch charakterystycznych części: jądra, nazywanego również wybrzuszeniem centralnym oraz dysku – płaszczyzny, która w ujęciu matematycznym jest osią symetrii rozkładu materii. W skład Drogi Mlecznej wchodzi również halo, zbudowane z bardzo rozrzedzonej materii, a także hipotetyczna korona, której istnienie potwierdzają zaledwie obliczenia – jak na razie naukowcom nie udało jej się zaobserwować.

Jak każda galaktyka nasza Droga Mleczna charakteryzuje się ogromną różnorodnością ciał. Jedne gwiazdy powstają w obłokach materii, a inne umierają, czasem nawet bardzo efektownie jako supernowa.

Jądro Galaktyki posiada większą gęstość gwiazd i materii względem dysku galaktycznego. Odległości między gwiazdami są tu o wiele mniejsze niż można to zaobserwować w dysku. Dzięki temu też oddziaływania między gwiazdami w jądrze są znacznie większe. Niestety obserwacje jądra nie są zbyt proste, ponieważ Układ Słoneczny znajduje się w płaszczyźnie Galaktyki, co powoduje zasłonięcie centrum Drogi Mlecznej przez dysk – dlatego też obserwacji nie dokonuje się w zakresie widzialnym, lecz najczęściej w podczerwieni.

Droga Mleczna jest ogromnych rozmiarów. Gdybyśmy chcieli przebyć drogę z jądra do granicy z szybkością światła zajęłoby nam to aż 65 tys. lat. Jak widać jest to odległość niewyobrażalna. Równie duża jest odległość od naszego Układu Słonecznego do centrum – tu byśmy potrzebowali przy takiej samej szybkości nie 65 tys. lat jakby to było w przypadku drogi centrum-granica, ale nieco mniej, bo 27 tys. lat<sup>1</sup> co i tak dla nas jest czasem równie dużym.

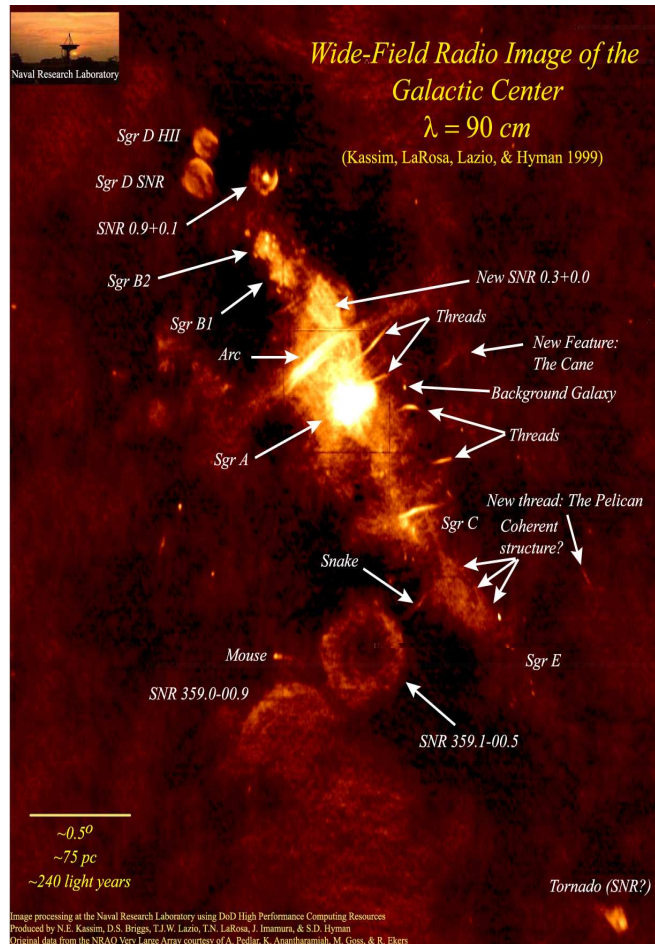
Centrum Galaktyki jest miejscem, w którym następują procesy o ogromnych energiach. Podczas obserwacji radiowych i podczerwonych naukowcy obserwują wiele ciekawych procesów, które tutaj występują. Można

---

<sup>1</sup> Ken Krosswel *Alchemia Nieba* s. 16

tutaj m.in. wymienić radioźródła. Jednym z takich bardzo „dynamicznych” miejsc jest przede wszystkim radioźródło Sagittarius A\*, które jest „głównym bohaterem” tej pracy.

Radioźródło Sgr A\* wraz z supermasywną czarną dziurą, która jest tematem tej pracy znajduje się w jądrze Drogi Mlecznej. Poniższe zdjęcie pokazuje jego lokalację:



**Rys 6. Centrum Drogi Mlecznej wraz z radioźródłem Sgr A\***  
 Źródło: <http://rsd-www.nrl.navy.mil/7213/lazio/GC/GC-P-BCD.med.jpg>

## II. Czarne dziury i supermasywne czarne dziury w teorii

### ***Pierwsze hipotezy istnienia czarnych dziur***

Istnienie czarnych dziur przewidział już pod koniec XVIII wieku znany matematyk, fizyk i astronom Pierre Simon Laplace. Wysunął on hipotezę istnienia takich ciał, z których ucieczka nawet światła jest niemożliwa. Hipotezę tą przedstawił w monografii „*Exposition du Systeme du Monde*” (*Wykład systemu świata*). Została ona wydana w roku 1796. Monografia ta nie zawierała żadnego wzoru – Laplace przedstawiał w niej, tak jak ma to miejsce dziś w książkach popularnonaukowych, tylko swoje przekonania. Stwierdza on w tym dziele, że grawitacja może wpływać również na światło, a nie tylko na ciała. Doprowadziło go to do dość ciekawego wniosku, że cytuję: „przyciąganie jasnej gwiazdy, mającej tę samą gęstość co Ziemia i średnicę 250 razy większą od Słońca nie pozwoliłoby żadnemu jej promieniowi dotrzeć do nas. Jest więc możliwe, że największe i najjaśniejsze ciała we Wszechświecie mogą być z tego powodu niewidoczne”<sup>2</sup>. Cała teoria Laplace'a opierała się na definicji prędkości ucieczki. Wiemy, że prędkość ucieczki z Ziemi wynosi 11 km/s. Gdybyśmy średnicę naszej Ziemi powiększyli 27 tysięcy razy, to można policzyć, że prędkość ucieczki byłaby równa prędkości światła. Te 27 tysięcy średnic Ziemi przekłada się na 250 średnic Słońca, co właśnie Laplace wywnioskował. Mimo tej bardzo ciekawej hipotezy Laplace nie udowodnił jej.

Mimo, że Laplace'a uznaje się jako prekursora hipotezy istnienia czarnych dziur nie był on pierwszym, który przewidział istnienie takich ciał. Już

---

<sup>2</sup> P.S. Laplace *Exposition du Systeme du Monde*

kilka lat wcześniej, bo w roku 1783, pewien brytyjski ksiądz, John Michell, doszedł do podobnych wniosków co Laplace<sup>3</sup>.

Obu uczonym udało się dojść do zaskakujących wniosków, ale ponieważ w tych czasach nie znano jeszcze fizyki relatywistycznej, nie można ich w pełni uznać za odkrywców (o ile można to tak nazwać) czarnych dziur. Całe ich rozumowanie opierało się na mechanice newtonowskiej – a miało to poważne konsekwencje. Nie wiedzieli oni, że żadna cząstka nie może przekroczyć prędkości światła, co czyni czarną dziurę całkowicie odizolowaną z zewnątrz.

### ***Własności czarnych dziur***

Mimo, że hipotezy istnienia czarnych dziur były znane od wielu lat to dopiero w ostatnim stuleciu ludzie poznali prawdziwą naturę tych ciał. Określenie ich własności możemy zawdzięczać fizyce relatywistycznej, stworzonej głównie przez Alberta Einsteina. Jak już wspomniałem wcześniej opieranie się na mechanice newtonowskiej w przypadku czarnych dziur prowadziło do nieprawidłowych wniosków. Zanim powstała fizyka relatywistyczna, teorie względności Einsteina ludzie opisywali świat tak jak go widzieli. Nikt nie myślał o prędkościach równych prędkości światła, bo było to wtedy całkowicie abstrakcyjne. Nawet teraz dla niektórych ogólna teoria względności brzmi bardzo niekonwencjonalnie. Jesteśmy po prostu przyzwyczajeni do świata jakiego widzimy na co dzień. Takie na przykład zjawisko jak dylatacja czasu, o którym wspomnę później, nie daje się łatwo wyobrazić. Nikt przecież nie porusza się z tak wielkimi szybkościami jak światło.

---

<sup>3</sup> Igor Nowikow *Czarne dziury i wszechświat* s. 19

Poznając naturę czarnych dziur będziemy musieli skorzystać z fizyki relatywistycznej, a to dlatego, że obiekty te mają całkiem inne właściwości niż ciała, które widzimy na co dzień.

Aby ciało było czarną dziurą jej promień musi być równy lub mniejszy od tzw. promieniowi grawitacyjnemu. Powstaje więc pytanie czym jest promień grawitacyjny. Otóż jest to taki promień, dla którego grawitacja staje się tak duża, że nawet światło nie mogłoby uciec. Należy tu podkreślić, że wielkość tego promienia zależy od masy ciała. Im mniejsza jest masa tym promień musi być mniejszy. Promień ten nawet dla ogromnych mas jest bardzo mały. I tu można podać kilku przykładów promieni grawitacyjnych: dla Słońca wynosi on ok. 3 km, a dla Ziemi 8,8 mm<sup>4</sup>. Jak widać wielkości te są bardzo małe. Z tych liczb od razu możemy wywnioskować, że ciała takie jak czarne dziury mają bardzo wielkie gęstości. Wielkość promienia grawitacyjnego możemy obliczyć dla dowolnej masy na podstawie prostego wzoru:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

, gdzie:

$r_g$  - promień grawitacyjny

G – stała grawitacji

M – masa ciała

c – szybkość światła

Wzór ten można wyprowadzić z zasady zachowania energii.

---

<sup>4</sup> J.M. Kreiner *Astronomia z Astrofizyką* Warszawa 1988 s. 217

Należy tutaj podkreślić, że promień grawitacyjny jest nazywany też promieniem Schwarzschilda. Karl Schwarzschild był wybitnym niemieckim astronomem. Uznaje się go jako twórcę astrofizyki. Zasłynął on rozwiązaniem równań ogólnej teorii względności Einsteina. Rozwiązał on również równanie Einsteina opisujące pole grawitacyjne ciała sferycznego, które to jest używane w teorii czarnych dziur.

Czarną dziurę ogranicza pewna granica nazywana horyzontem. Jest to powierzchnia, która w każdym punkcie jest styczna do stożka świetlnego<sup>5</sup>, innymi słowy światło obiega tutaj czarną dziurę dookoła, ale nie może ani do niej wpaść ani uwolnić się z jej grawitacji. Obserwator znajdujący się pod horyzontem nie może już przesłać żadnej informacji na zewnątrz □ trwałoby to nieskończenie długo. Nie może on również uwolnić się już z działania czarnej dziury.

Ponieważ czarne dziury nie emitują żadnego promieniowania elektromagnetycznego niemożliwa jest ich obserwacja. Jedynym sposobem potwierdzenia ich obecności jest obserwacja zakłóceń ruchu towarzysza, czyli normalnej gwiazdy, która obiega czarną dziurę. W układzie takim następuje przepływ materii z normalnej gwiazdy do drugiej gwiazdy – czarnej dziury. Materia spływa do gęstszego ciała niebieskiego po torze spiralnym. Ogromne tarcie materii powoduje jej rozgrzewanie się do temperatury nawet dziesiątków milionów kelwinów. „Spływająca” materia tworzy wokół czarnej dziury tzw. dysk akrecyjny, który jest najczęściej źródłem promieniowania rentgenowskiego, co również pomaga nam w potwierdzeniu obecności czarnej dziury.

---

<sup>5</sup> Stożek świetlny - w teorii względności hiperpowierzchnia rozdzielająca czasoprzestrzeń na dwie części. W wewnętrznej części stożka świetlnego znajdują się punkty czasoprzestrzeni, do których może docierać informacja z punktu wierzchołkowego (tzw. punkty czasopodobne), na zewnątrz zaś punkty, do których taka informacja dotrzeć nie może (tzw. punkty przestrzennopodobne).

## **Czarne dziury jako ostatni etap ewolucji gwiazd**

Czarne dziury są ostatnim etapem ewolucji masywnych gwiazd. Gdy gwiazda kończy swoje życie w wybuchu supernowej czasem zdarza się, że masa pozostałości jest wystarczająco duża, aby kolapsować. Zależnie od masy materii może powstać gwiazda neutronowa, gdy masa wynosi mniej niż 3 masy Słońca, lub też, gdy masa jest większa od 3 mas Słońca – czarna dziura.

Tak masywne obiekty jak czarne dziury powstają prawdopodobnie dość rzadko. Wybuch supernowej jest zwykle tak ogromny, że rozrzuca materię na ogromne odległości, co czasem uniemożliwia kolaps materii.

Aby powstała czarna dziura gwiazda musi mieć masę ponad 40 mas Słońca. Gdy masa ta jest mniejsza gwiazda kończy swój żywot jako biały karzeł, dla mas do 9 mas Słońca lub jako gwiazda neutronowa, gdy jej pierwotna masa mieści się w przedziale 6 do 40 mas Słońca.

W gwiazdzie o masie ponad 40 mas Słońca w końcowej fazie ewolucji jądro gwiazdy jest zbudowane z żelaza. Ponieważ masa tego jądra jest większa od maksymalnej masy gwiazdy neutronowej, to staje się ono niestabilne i kolapsuje w czarną dziurę. Procesowi temu towarzyszy potężny wybuch supernowej o energii  $10^{47} - 10^{48} \text{ J}^6$ . Zapadanie prowadzi do ogromnego zmniejszenia promienia jądra. Czarna dziura jest więc ogromnie małych rozmiarów. Może mieć ona promień zaledwie kilku kilometrów.

Co ciekawe gwiazda zapadająca się w czarną dziurę traci w tym procesie wiele własnych właściwości. Jedynymi własnościami, które się zachowują jest

---

<sup>6</sup> Marek Demiański, *Astrofizyka relatywistyczna*, s. 161



masa, moment pędu (czyli czarna dziura może wykonywać ruch obrotowy) oraz ładunek elektryczny.

### ***Ruch materii i światła w pobliżu czarnej dziury***

W polu grawitacyjnym, według teorii Newtona, wszystkie ciała poruszają się po krzywej otwartej, czyli hiperboli, paraboli lub krzywej zamkniętej tj. elipsie. Gdy odległość ciała, czy to materii, od czarnej dziury jest dość duża możemy bez problemu korzystać z teorii Newtona. Wiemy, że gdy ciało porusza się wokół masywniejszego ciała z prędkością mniejszą od prędkości ucieczki to trajektorią takiego ciała jest elipsa. Zbliżając się do czarnej dziury ciała już nie poruszają się tak jak to opisuje teoria Newtona.

Według teorii Einsteina ciała poruszające się z prędkością mniejszą od prędkości ucieczki niekoniecznie muszą być elipsą<sup>7</sup>. Dobrym potwierdzeniem takiego zjawiska jest obieg Merkurego wokół Słońca, którego orbita obraca się o 43 sekundy łuku w ciągu wieku. Takie samo zjawisko moglibyśmy zaobserwować również wokół czarnej dziury, lecz odchylenia orbity byłyby o wiele większe.

W przypadku gdy prędkość ciała jest równa prędkości ucieczki, mamy w teorii Newtona do czynienia z ruchem kołowym. Ciało może się poruszać w dowolnej odległości od centrum pola grawitacyjnego. Jeśli natomiast grawitacja jest duża trzeba już korzystać z teorii Einsteina. Dość istotną różnicą pomiędzy mechaniką relatywistyczną a klasyczną w tym przypadku jest to, że gdy ciało znajduje się coraz bliżej źródła grawitacji, to jego prędkość musi być

---

<sup>7</sup> Igor Nowikow Czarne dziury i wszechświat s. 38-40

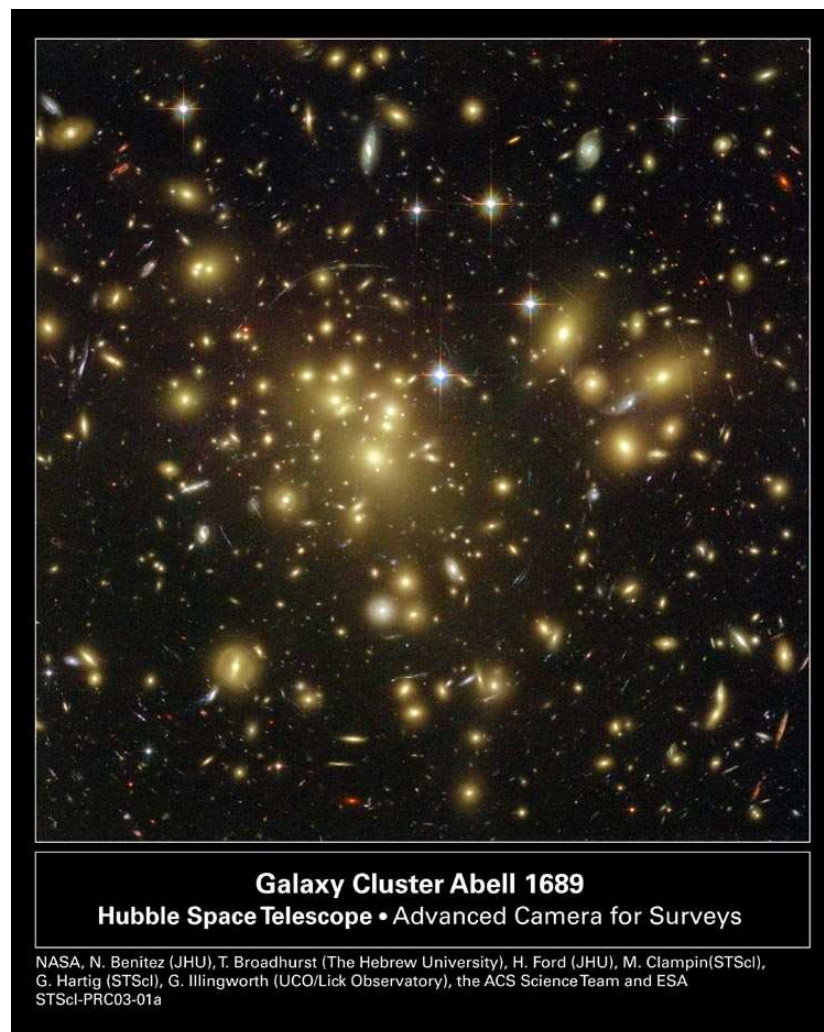
większa aby utrzymało się na orbicie kołowej. Trzeba tu podkreślić, że gdy promień orbity ciała obiegającego czarną dziurę jest równy 1,5 promienia Schwarzschilda, to jego prędkość ruchu jest równa prędkości światła. Dlatego żadne ciało nie może poruszać się po okręgu na orbicie o promieniu mniejszym od 1,5 promienia Schwarzschilda. Promień równy 1,5 promienia Schwarzschilda nazywa się czasem sferą fotonów. Nazwa ta wywodzi się z tego, że na tej orbicie światło może okrążyć czarną dziurę po okręgu. Należy tu podkreślić, że orbita taka jest niestabilna. Znaczący to tyle, że nawet niewielka siła może spowodować spadek ku czarnej dziurze, lub też wyrzucenie ciała ku nieskończoności, czyli opuszczenie na zawsze czarnej dziury, czego teoria Newtona w tym przypadku nie uwzględnia.

W sytuacji gdy ciało zbliży się na odległość podwojonego promienia grawitacyjnego czarnej dziury to będzie się ono poruszać po okręgu równym dwóm promieniom grawitacyjnym. Ciało takie nie będzie już mogło się oddalić od czarnej dziury, lecz najwyżej zbliżyć się i wpaść ku osobliwości.

Należy tu też wymienić kolejny scenariusz. Gdy ciało porusza się dostatecznie blisko czarnej dziury to zostaje przez nią przechwycone. Posiadanie w tym przypadku odpowiedniej prędkości ucieczki nie gwarantuje jednak, że ciało takie mogłoby oddalić się od czarnej dziury do nieskończoności. Trzeba tutaj uwzględnić również kąt z jakim porusza się ciało ku czarnej dziurze. Jeżeli kąt ten jest mniejszy od pewnego kąta krytycznego, to nasze ciało spadnie ku czarnej dziurze. Jeśli inaczej to ciało może się oddalić od czarnej dziury. Kąt krytyczny jest zależny od odległości ciała od czarnej dziury. Wraz ze wzrostem odległości ciała kąt ten maleje.

Podobnie jak materia międzygwiazdowa zachowuje się światło. Światło w pobliżu czarnej dziury, jak i wokół każdego źródła grawitacji jest uginane. Efekty te są tym większe im bliżej czarnej dziury znajdzie się światło. Niezwykle interesującym zjawiskiem, które jest wynikiem uginania światła

przez masę, jak również czarne dziury, jest soczewkowanie grawitacyjne. Efektem tego zjawiska jest pojawienie się pozornych obrazów rzeczywistych ciał znajdujących się za ciałem soczewkującym, pojaśnienie tychże obrazów, ale również ich powiększenie. W 1919 roku zespół znanego astrofizyka brytyjskiego, Arthura Stanley'a Eddingtona próbował zmierzyć kąt ugięcia światła przez Słońce podczas jego zaćmienia. Eksperyment ten w pełni potwierdził teorię Einsteina, mimo dość dużego, bo 30% błęd pomiarowego<sup>8</sup>.



**Rys 7. Efekt soczewkowania grawitacyjnego**  
Źródło: <http://gravitacni-cocka.navajo.cz/>

---

<sup>8</sup> K. Z. Stanek, B. Paczyński Soczewkowanie grawitacyjne Postępy Astronomii 3/93 s. 100

Grawitacja wpływa na światło również w inny sposób. Mowa tu o takich efektach jak dylatacja czasu i związane z tym poczerwienienie światła. Światło jest tym bardziej poczerwienione im bliżej znajduje się źródło promieniowania elektromagnetycznego. Dylatacja to nic innego jak spowolnienie czasu. Obserwator gdyby obserwował ciało poruszające się ku czarnej dziurze zauważyłby, że porusza się ono coraz wolniej, aż do momentu zatrzymania. Oczywiście zatrzymanie to zaobserwowałby tylko obserwator z zewnątrz. Dla ciała zmierzającego ku sferze Schwarzschilda czas biegnie tak samo jak w innym miejscu.

### **III. Supermasywne czarne dziury – fakty obserwacyjne**

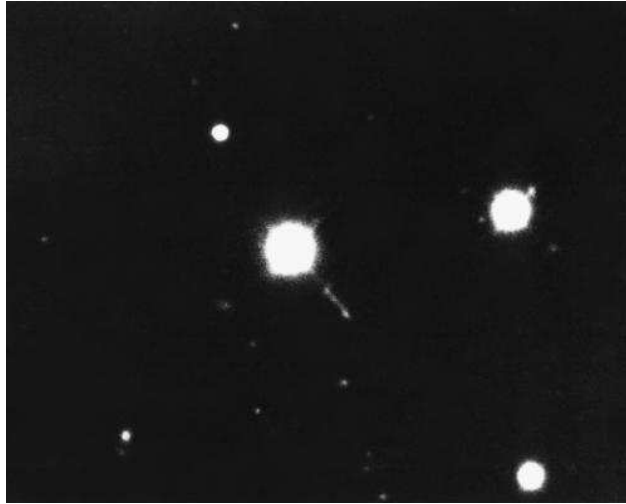
#### ***Odkrycie kwazara 3C 273***

W drugiej połowie minionego stulecia, a dokładniej w roku 1963, naukowcy dokonali dość interesującego odkrycia. Jednym z nich był Maarten Schmidt, pracujący w obserwatorium astronomicznym Mount Palomar. Zaobserwował on bardzo ciekawy obiekt przypominający gwiazdę, ale charakteryzujący się innymi właściwościami. Obiekt ten został oznaczony symbolem 3C 273 i znajduje się w gwiazdozborze Panny. Za sprawą obserwacji radiowych zauważono, że emituje on promieniowanie o centymetrowej długości fali.

Obserwację radiową takich obiektów dokonywano z pomocą ruchu Księżyca na niebie, a to dlatego, że trudno było ustalić skąd promieniowanie dochodzi<sup>9</sup>. Gdy Księżyc zakrywał taki obiekt promieniowanie nie dochodziło, więc można było ze stosunkowo dużą dokładnością umiejscowić radioźródło na niebie.

---

<sup>9</sup> Fulvio Melia *Na skraju nieskończoności* s. 10



**Rys 8. Kwazar 3C 273 wraz z wyrzutem materii w postaci jeta**  
Źródło: <http://www.seds.org/~spider/spider/Misc/3c273.html>

Obserwowany obiekt był dość słaby, a jego wygląd niezbyt świadczył o tym, że może być źródłem silnego promieniowania. Bardzo interesujące dla Schmidta było to, że widmo tego obiektu bardzo przypominało widmo wodoru w laboratorium, lecz było przesunięte o 16 procent – czyli bardzo przesunięte ku czerwieni. Świadczyło to o ogromnej odległości do obiektu oraz o jego oddalaniu się od nas<sup>10</sup>.

Obiekt ten, jak już wspomniałem, bardzo przypominał gwiazdy, więc nadano mu nazwę kwazar od angielskiego określenia *quasi-stellar radio source*.

Kilka lat wcześniej Edwin Hubble sformułował zasadę znaną dzisiaj jako prawo Hubble'a. Zasada ta jest bardzo pomocna do wyznaczenia odległości galaktyk od nas. Według niej im dalej znajduje się galaktyka, tym jej prędkość ucieczki jest większa.

Schmidt na podstawie prawa Hubble'a zdołał obliczyć odległość kwazara 3C 273. Przesunięcie dopplerowskie widma pomogło mu ocenić prędkość

---

<sup>10</sup> Fulvio Melia *Na skraju nieskończoności* s. 13

ucieczki, która to wynosiła blisko 50 tys. kilometrów na sekundę. Tak więc obiekt ten odległy jest od nas o około 3 mld lat świetlnych.

Zaobserwowano, że natężenie światła emitowanego przez 3C 273 zmienia się w okresie 10 do 20 miesięcy, z czego można wnioskować, iż obszar emitujący światło nie może być większy od kilku lat świetlnych, a to dlatego że światło w ciągu 10-20 miesięcy przemierza właśnie taką odległość.

Oprócz silnego promieniowania widzialnego kwazary emitują jeszcze silniejsze promieniowanie rentgenowskie. Tutaj również mamy do czynienia z okresową zmianą natężenia promieniowania, lecz okres ten jest o wiele krótszy – natężenie może się zmieniać w ciągu kilku godzin. Na tej podstawie dochodzimy do wniosku, że źródło promieniowania ma rozmiar mniejszy od orbity Neptuna.

Energia emitowana przez kwazar jest znacznie większa od energii emitowanej przez galaktykę. Co ciekawe, źródło promieniowania ma rozmiar nawet mniejszy od Układu Słonecznego.

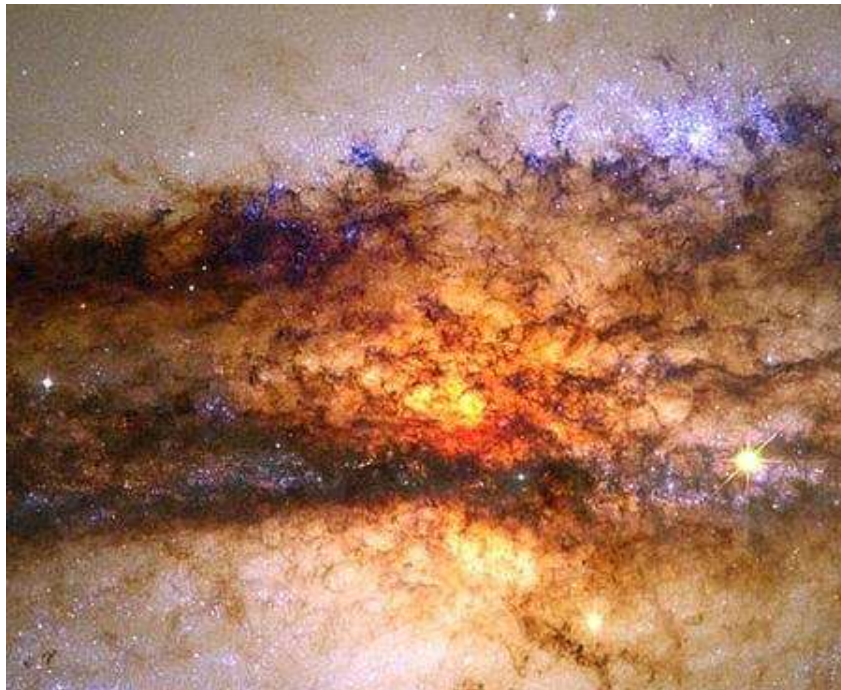
Fakt, że tak bardzo mały obszar może być źródłem światła nawet 100 mld razy potężniejszym od Słońca, doprowadził uczonych do wniosków, iż głównym źródłem takich energii jest supermasywna czarna dziura, a właściwie dysk akrecyjny wokół niej.

### ***Supermasywne czarne dziury w innych galaktykach***

Nie tylko w kwazarach mamy do czynienia z supermasywnymi czarnymi dziurami. Przypuszcza się, że obiekty te znajdują się w większości galaktyk. Niestety bliższe supermasywne czarne dziury nie są takie efektowne jak te

w kwazarach. Jest to spowodowane mniejszą gęstością materii w tych miejscach. Dlatego też trudno je zaobserwować.

Jednym z dość znanych takich obiektów bliższych nas jest Centaur A (NGC 5128), który znajduje się w odległości 11 mln lat świetlnych od nas. W ciemnych obłokach pyłu znajdujących się w centrum tejże galaktyki zaobserwowano w zakresie podczerwonym promieniowania elektromagnetycznego bardzo jasny dysk akrecyjny obracający się z ogromną prędkością. Masa supermasywnej czarnej dziury w Centaurze A wynosi aż 200 mln mas Słońca!



**Rys 9. Zdjęcie centrum galaktyki Centaur A wykonane przez Teleskop kosmiczny Hubble'a (HST)**

Źródło: <http://www.solstation.com/x-objects/cent-a.htm>





**Rys 10. Centrum galaktyki Centaur A widziane w zakresie promieniowania rentgenowskiego, wykonane przez rentgenowski teleskop kosmiczny Chandra. Widać charakterystyczny jet wyrzucony z supermasywnej czarnej dziury.**  
Źródło: <http://www.solstation.com/x-objects/cent-a.htm>

Obserwacje tego obiektu doprowadziły do wniosku, że podobnie jak w przypadku kwazara 3C 273, strumień materii jest wyrzucany prostopadle do dysku materii. Ten strumień materii jest nazywany przez naukowców jetami (dżetami). Materia w jetach porusza się z prędkością bardzo bliską prędkości światła. Jest ona tak zjonizowana, że powstaje z niej plazma. Jety są źródłem promieniowania w zakresie radiowym oraz rentgenowskim.

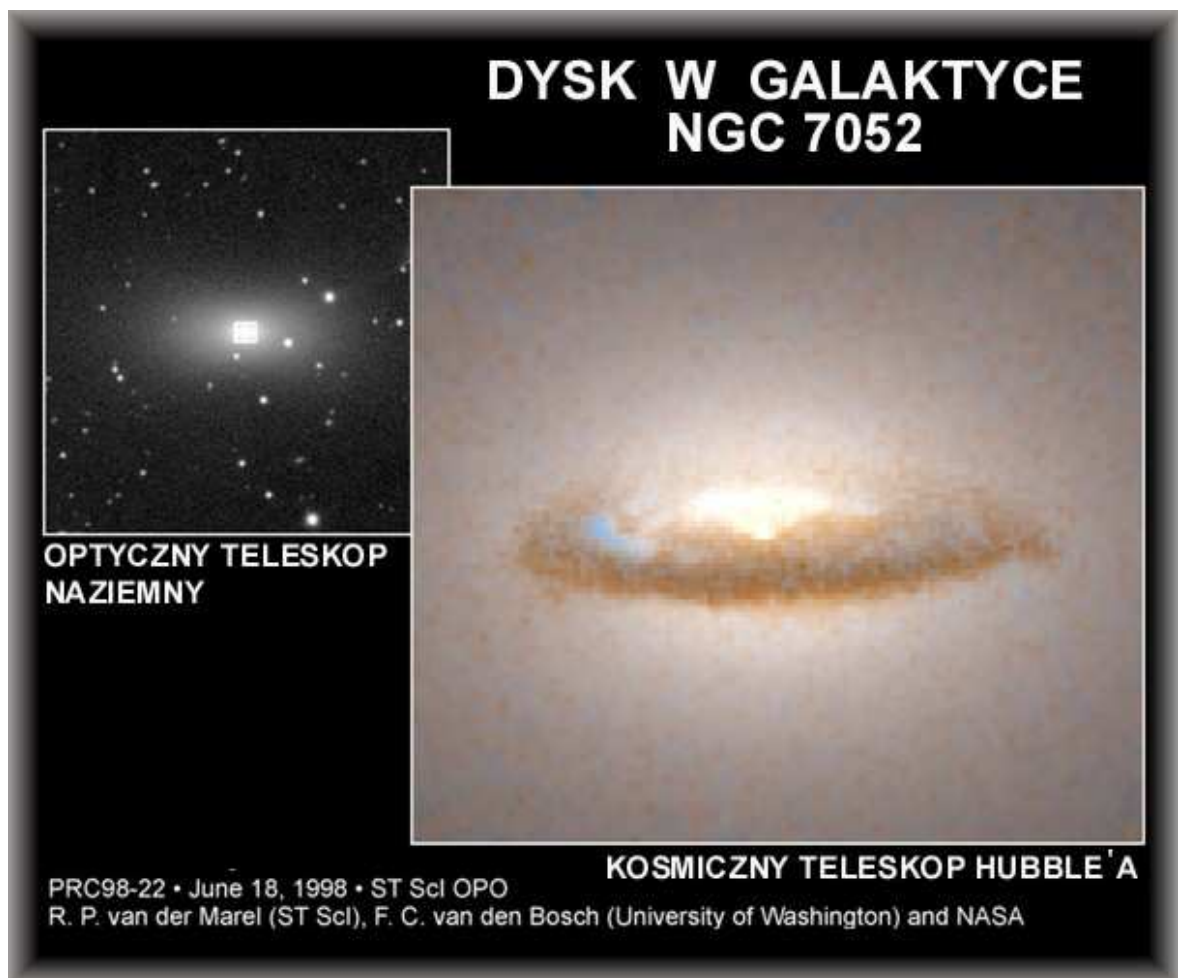
Dzięki temu, że materia spadająca na supermasywną czarną dziurę tworzy bardzo jasny dysk akrecyjny można z wielką łatwością powiedzieć, że właśnie tam znajduje się czarna dziura. Dysk jest tak jasny, że przyćmiewa czasem gwiazdy znajdujące się w pobliżu. Są to jedne z najjaśniejszych obiektów widzianego Wszechświata.

Naukowcy doszli do wniosku, że supermasywne czarne dziury w galaktykach mają wiek porównywalny z wiekiem galaktyki. Dlatego prawdopodobnie istnieją one od początków Wszechświata. Im starsza jest galaktyka tym czarna dziura ma większą masę. Supermasywna czarna dziura przez całe swoje życie gromadzi materię stając się coraz bardziej masywną, ponieważ materia spadająca ku czarnej dziurze nie może się już z niej uwolnić.

Innym bardzo ciekawym obiektem jest czarna dziura w galaktyce eliptycznej NGC 7052, odległej od nas o 191 mln lat świetlnych, znajdującej się w gwiazdozbiornie Lisa. Obserwację tegoż obiektu dokonano za pomocą Teleskopu Kosmicznego Hubble'a. Zdjęcie wykonane przez ten instrument pokazuje dysk materii wokół czarnej dziury. Dysk ten jest prawdopodobnie pozostałością po kolizji galaktyk<sup>11</sup>. Z biegiem czasu zostanie całkowicie pochłonięty przez czarną dziurę. W centralnej części dysku zaobserwowano bardzo jasny punkt światła. Jest on wynikiem akumulacji światła gwiazd znajdujących się w pobliżu czarnej dziury. Fakt, że gwiazdy znajdują się tutaj tak bardzo blisko siebie świadczy o istnieniu źródła bardzo silnej grawitacji. Gdyby nie silna grawitacja gwiazdy na pewno nie znajdowałyby się tak blisko siebie.

---

<sup>11</sup> Fulvio Melia *Na skraju nieskończoności* s. 26

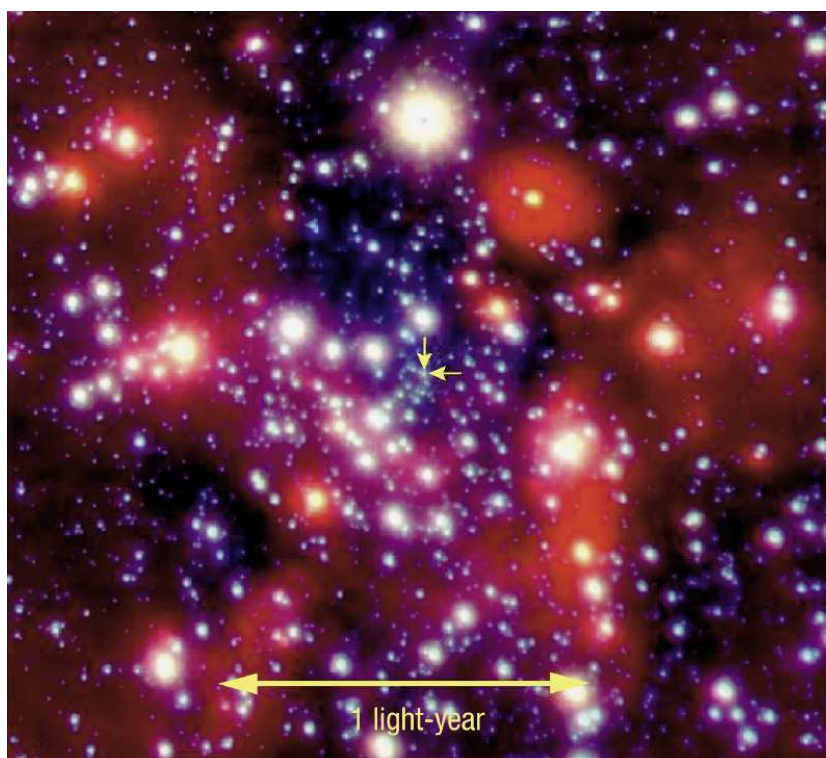


**Rys. 11 Zdjęcie naziemne galaktyki NGC 7052 (po lewej) oraz powiększenie centrum tej galaktyki (po prawej) wykonane przez Teleskop Kosmiczny Hubble'a, w którym obserwujemy charakterystyczny dysk akrecyjny.**  
Źródło: <http://auger.ifj.edu.pl/UHE/Widmo2-b.html>

## **Supermasywna czarna dziura w naszej Drodze Mlecznej**

Supermasywne czarne dziury, o których pisałem przed chwilą są dosyć odległe od nas. Znajdują się w innych galaktykach odległych o kilka milionów lat świetlnych. Na szczęście i nasza Galaktyka jest miejscem, gdzie taki obiekt występuje. Nie jest tak masywna jak inne obiekty tego typu, lecz dzięki mniejszej odległości możemy z większą łatwością ją badać. Znajduje się ona w radioźródle o nazwie Sagittarius A\*, w skrócie Sgr A\*.

Analizując zdjęcia centrum Drogi Mlecznej można zauważyć, że gęstość gwiazd w tym miejscu jest bardzo duża. Kilka milionów gwiazd zajmuje dosłownie 1 rok świetlny od jądra Galaktyki. Przedstawia to poniższe zdjęcie:



**Rys 12. Zdjęcie centrum Drogi Mlecznej w podczerwieni**  
Źródło: <http://www.astroex.org/english/exercise6/images.php>

Widać, że rzeczywiście gwiazdy są tu bardzo „ściśnięte”. Gdybyśmy porównali to z gęstością gwiazd w pobliżu naszego Słońca to różnica jest ogromna.

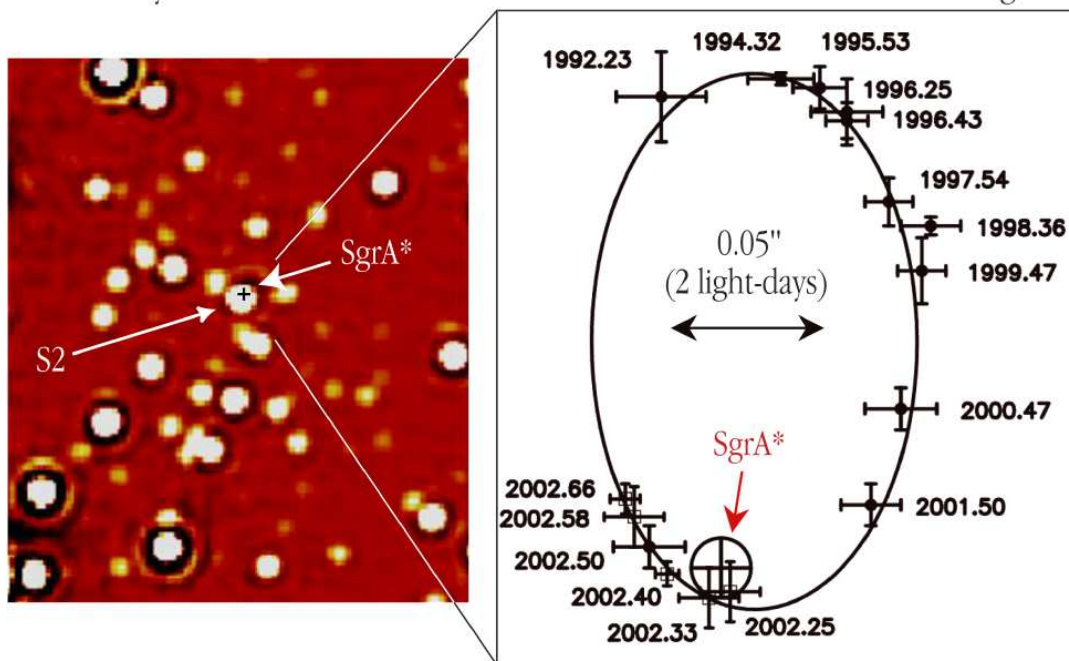
Gwiazdy znajdujące się w centrum Galaktyki są stosunkowo bliskie nam, dzięki czemu możemy badać ich ruch.

Ciekawej obserwacji dokonano w październiku 2002 roku<sup>12</sup>. Obserwując ruch gwiazd wokół tejże supermasywnej czarnej dziury, zauważono gwiazdę o bardzo ciekawej orbicie. Gwiazda S2, o której tutaj się tyczy temat, jest jedną ze słabszych gwiazd znajdujących się w pobliżu centrum. Jest to gwiazda o masie 15 razy większej od Słońca i z około 7 razy większą. Interesujące było to, że podczas obserwacji gwiazda ta znajdowała się prawie w miejscu, gdzie spodziewano się supermasywnej czarnej dziury. Obserwacje tego obiektu wykonywano przez kolejne 10 lat. S2 zakreślała długą elipsę, której ognisko wskazywało na pozycję czarnej dziury. W momencie najbliższego zbliżenia do czarnej dziury znajdowała się zaledwie w odległości 17 godzin świetlnych, czyli około 3 razy więcej niż odległość Słońce-Pluton i poruszała się z szybkością ponad 5000 kilometrów na sekundę. Znajac orbitę tejże gwiazdy astronomowie mogli obliczyć masę supermasywnej czarnej dziury – oszacowali ją na około 2,6 mln mas Słońca.

---

<sup>12</sup> Fluvio Melia *Na skraju nieskończoności. Supermasywne czarne dziury we wszechświecie*. s. 37

NACO May 2002



The Motion of a Star around the Central Black Hole in the Milky Way

ESO PR Photo 23c/02 (9 October 2002)

© European Southern Observatory



**Rys. 13 Zdjęcie centrum Drogi Mlecznej wraz z gwiazdą S2 (po lewej) oraz jej orbita (po prawej)**

Źródło: <http://www.solstation.com/x-objects/s2.htm>

Pomimo wielkiej gęstości gwiazd w tym miejscu astronomowie nie do końca byli pewni obecności supermasywnej czarnej dziury<sup>13</sup>. Lecz 26 października 2000 roku teleskop rentgenowski Chandra zaobserwował w tym miejscu nagły wzrost emisji promieniowania rentgenowskiego. W zaledwie kilka minut radioźródło Sgr A\* emitowało promieniowanie X 45 razy intensywniej, by po kolejnych 3 godzinach powrócić do zwykłej intensywności.

Materia spadająca ku czarnej dziurze, jak wiemy tworzy dysk akrecyjny. Rozpędzona do ogromnych prędkości i bardzo ściśnięta zaczyna emitować promieniowanie rentgenowskie. To stąd możemy wnioskować, że

<sup>13</sup> Jarosław Włodarczyk *Czarna w Mlecznej* <http://www.wiw.pl>

zaobserwowane zjawisko było wynikiem spadku materii ku supermasywnej czarnej dziurze.

Należałoby tu jeszcze wspomnieć, że w czasie rozbłysku zaobserwowano dziesięciominutowe wahania intensywności promieniowania. Moc promieniowania w minimum była 5 razy mniejsza od tego w maksimum. Mając okres zmian promieniowania astronomowie mogli oszacować wielkość obiektu emitującego promieniowanie rentgenowskie, opierając się na tym, że żaden sygnał nie może poruszać się z prędkością większą od prędkości światła. Ku ich zdziwieniu obliczenia wskazywały na obiekt, który zajmuje obszar wewnątrz orbity Ziemi.

## **IV. Problem modelowania orbity gwiazdy obiegającej supermasywną czarną dziurę Drogi Mlecznej na podstawie danych otrzymanych przez teleskop ESO VLT**

Praca niniejsza ma na celu obliczenie, a właściwie oszacowanie, masy supermasywnej czarnej dziury w centrum Drogi Mlecznej. W oszacowaniu masy pomoże nam znajomość praw Keplera, jak i własności geometryczne elipsy.

### ***Prawa Keplera***

W 1609 roku znany uczyony, Johannes Kepler, odkrył prawa rządzące ruchem planet wokół Słońca. Jego odkrycie opierało się na jego obserwacjach, jak i obserwacjach Tycho Brahe. Problem odkrycia tych praw był taki, że wymagało ono wieloletnich obserwacji i wielu obliczeń. Lecz gdy w końcu się to udało astronomowie mogli z wielką łatwością scharakteryzować ruch planet.

Kepler sformułował trzy prawa. Każde z nich opisuje własności orbity planet (zresztą nie tylko, o czym dowiemy się dalej).

**I prawo Keplera** – mówi, że orbita każdej planety jest elipsą, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tejże elipsy.



**II prawo Keplera** – promień wodzący planet zakreśla w równych odstępach czasu równe pola.

$$\frac{P}{\Delta T} = const$$

,gdzie:

P – pole wodzące

$\Delta T$  – odstęp czasu

**III prawo Keplera** – mówi, że kwadraty okresów gwiazdowych obiegu planet są proporcjonalne do sześciątów ich wielkich półosi, czyli:

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (2)$$

,gdzie  $P_1$  i  $P_2$  to okresy gwiazdowe obiegu dwóch planet oraz  $a_1$  i  $a_2$  wielkie półosie orbity planet.

III prawo Keplera umożliwia nam obliczenie okresu obiegu planety na podstawie odległości planety od Słońca, i na odwrót.

### ***Uogólnione prawa Keplera***

Za czasów Keplera dla astronomów odległości do gwiazd były zbyt duże, aby je badać. W dzisiejszych czasach posiadamy o wiele lepsze instrumenty naukowe. Wraz z rozwojem astronomii okazało się, że prawa Keplera nie opisują tylko i wyłącznie ruch planet w naszym Układzie

Słonecznym. Prawa te są uniwersalne dla wszystkich ciał niebieskich. Powstały w ten sposób uogólnione prawa Keplera.

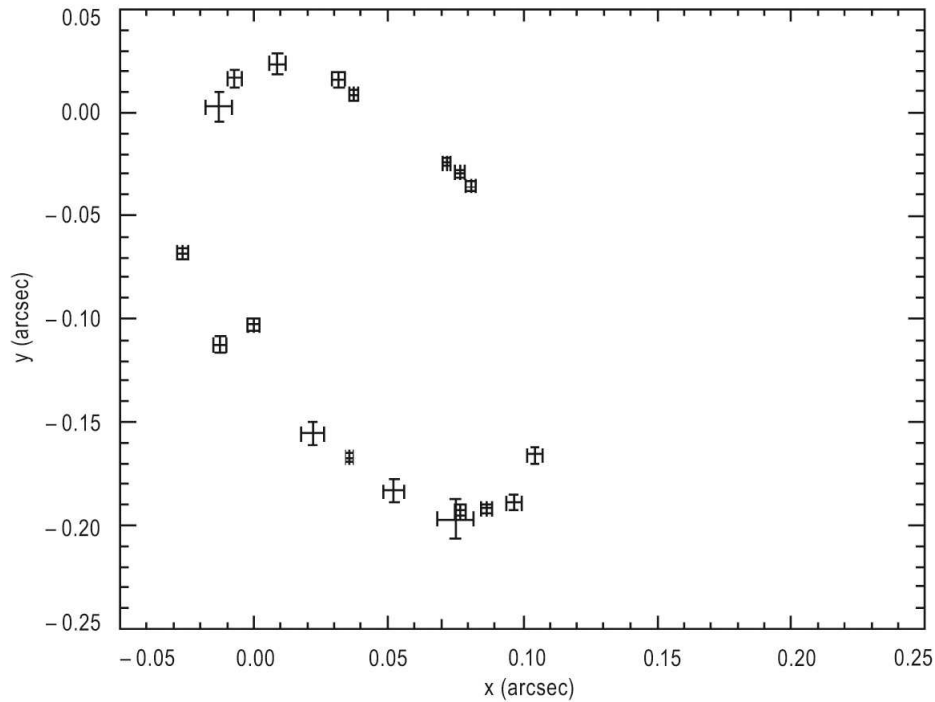
**I prawo Keplera uogólnione** precyzuje, że ruch ciał niebieskich po elipsie nie spełniają tylko i wyłącznie planety obiegające Słońce, ale może to być dowolne inne ciało obiegające inną gwiazdę. To samo się tyczy **II prawa Keplera**, które również nie opisuje tylko i wyłącznie ruch planet.

Na podstawie prawa ciążenia Newtona możemy wyprowadzić wzór na **uogólnione III prawo Keplera**. Mając ten wzór i znając wartości okresu obiegu jak również wielkiej półosi możemy wyliczyć sumaryczną masę Słońca i planety.

Wzór ten przedstawia się w następujący sposób:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M + m)} a^3 \quad (3)$$

Mając powyższe wiadomości możemy przystąpić do oszacowania masy czarnej dziury.



**Rys. 14 Wykres punktów pomiarowych**

Źródło: <http://www.astroex.org/english/exercise6/images.php>

Widzimy na powyższym wykresie, że punkty nie leżą na jednej elipsie, bo każdy punkt posiada większą lub mniejszą niepewność pomiarową. Oprócz tego elipsa jest nachylona pod pewnym kątem do poziomu.

Znajomość poniższego równania elipsy we współrzędnych kartezjańskich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

nie jest wystarczająca.

Problem ten można rozwiązać korzystając z macierzy i równań opartych na współrzędnych biegunowych.

Każdy punkt elipsy we współrzędnych biegunowych można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \phi_n \\ b \sin \phi_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

Te współrzędne opisują nam punkty elipsy nie obróconej pod żadnym kątem o środka w punkcie (0;0).

Lecz mamy macierz obrotu:

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

Dzięki macierzy obrotu możemy wyliczyć współrzędne każdego punktu elipsy obróconej pod pewnym kątem. Współrzędne te możemy obliczyć w następujący sposób<sup>14</sup>:

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{sr} \\ y_{sr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos \phi_n \\ b \sin \phi_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

,gdzie  $\begin{bmatrix} x_{sr} \\ y_{sr} \end{bmatrix}$  to współrzędne przesuniętego środka elipsy.

---

<sup>14</sup> M. Renault *Fitting circles and ellipses to data using the least-squares method*  
<http://www.math.temple.edu/~renault/ellipses.html>

Można więc każdą współrzędną punktu obliczyć na podstawie dwóch poniższych ostatecznych wzorów:

$$x_n = \cos(\alpha) \cdot a \cdot \cos(\phi_n) - \sin(\alpha) \cdot b \cdot \sin(\phi_n) + x_{\acute{s}r} \quad (8)$$

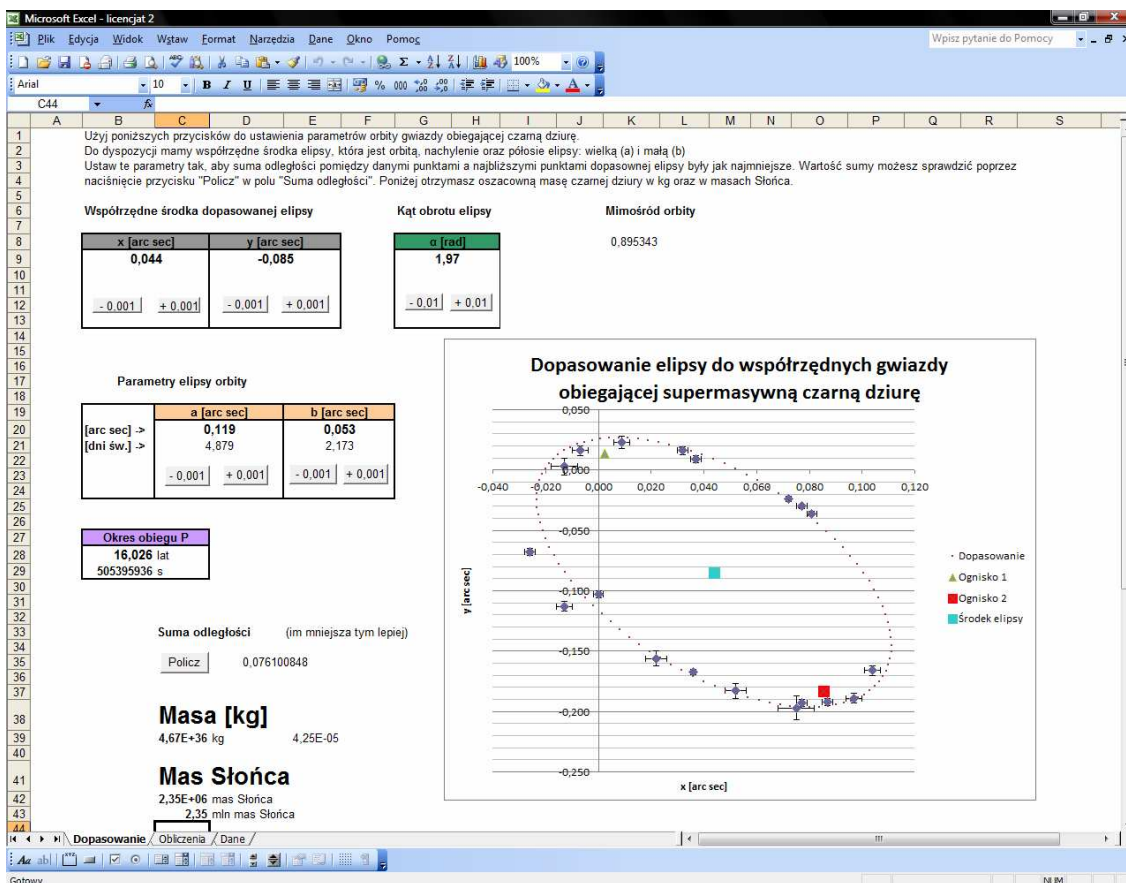
$$y_n = \sin(\alpha) \cdot a \cdot \cos(\phi_n) + \cos(\alpha) \cdot b \cdot \sin(\phi_n) + y_{\acute{s}r} \quad (9)$$

Znając powyższe wzory, jak i prawa Keplera możemy przystąpić do oszacowania masy czarnej dziury.

## Oszacowanie masy supermasywnej czarnej dziury z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel

Gdy znamy już algorytm dopasowania możemy go wykorzystać w praktyce. Do tego celu przygotowałem dokument Microsoft Excel z trzema arkuszami. Poniżej scharakteryzuję każdy z nich.

### Arkusz „Dopasowanie”



Rys. 15 Arkusz „Dopasowanie”

Źródło: własne

W arkuszu tym możemy zmieniać parametry orbity elipsy, takie jak wielka półoś ( $a$ ), mała półoś ( $b$ ), kąt obrotu ( $\alpha$ ) czy współrzędne środka elipsy. W celu zmiany każdego z parametrów mamy po dwa przyciski do każdego z nich – jeden zmniejszający parametr, i drugi zwiększający. Po zmianie dowolnego parametru wykres elipsy się zmienia.

Do każdego wymienionego powyżej przycisku przyporządkowany jest skrypt w języku Visual Basic zmieniający zawartość komórki o wartość znajdującą się w etykiecie przycisku. Przykładowy skrypt wygląda tak:

```
Sub Przycisk1_Kliknięcie()  
    Arkusz1.Cells(9, 2).Value = Arkusz1.Cells(9, 2).Value - 0.001  
End Sub
```

Skrypt ten modyfikuje wartość komórki w wierszu 9 i kolumnie 2, odejmując od niej wartość 0.001.

Aby sprawdzić, czy wybrane przez nas parametry elipsy są najbliższe właściwych klikamy na przycisk Policz – w polu obok zostaje wyliczona suma odległości pomiędzy punktami pomiarowymi, a najbliższym punktem elipsy. Im suma ta jest mniejsza, tym elipsa jest lepiej dopasowana. Skrypt wykonujący powyższe obliczenia wygląda tak:

```
Sub Przycisk13_Kliknięcie()  
  
    Dim dane_x, dane_y As Double  
    Dim licznik1, licznik2  
    Dim el_x, el_y, odl, odl_min As Double  
    Dim suma As Double
```

```

suma = 0
For licznik1 = 0 To 18
dane_x = Arkusz3.Cells(6 + licznik1, 3).Value
dane_y = Arkusz3.Cells(6 + licznik1, 4).Value
odl_min = 100
  For licznik2 = 0 To 99
    el_x = Arkusz2.Cells(11 + licznik2, 5).Value
    el_y = Arkusz2.Cells(11 + licznik2, 6).Value
    odl = Sqr((el_x - dane_x) * (el_x - dane_x) + (el_y - dane_y) * (el_y - dane_y))
    If (odl < odl_min) Then
      odl_min = odl
    End If
  Next licznik2
suma = suma + odl_min
Next licznik1

Arkusz1.Cells(35, 4).Value = suma

End Sub

```

Skrypt do każdego punktu pomiarowego z arkusza „**Dane**” wyszukuje najbliższy punkt leżący na dopasowanej do danych elipsie z arkusza „**Obliczenia**” i odległość do tegoż najbliższego punktu dodaje do zmiennej *suma*. W moim przypadku punktów na elipsie jest 100, ale można zwiększyć dokładność i dać tych punktów więcej. Aby to zrobić w arkuszu „**Obliczenia**”



zmieniamy wartość zmiennej  $\delta_{\gamma}$ . Ja przyjąłem  $\delta_{\gamma}$  równe  $\frac{2\pi}{100}$ . Kąt  $\varphi_n$  zwiększa się co  $\delta_{\gamma}$ .

Najistotniejszym polem w tym arkuszu jest pole oszacowanej masy. Masę otrzymujemy w kilogramach oraz w masach Słońca. Masę w kilogramach otrzymujemy ze wzoru:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2 G} \quad (10)$$

,gdzie:

a – wielka półoś orbity

P – okres obiegu

G – stała grawitacji

Aby otrzymać masę w masach Słońca należy podzielić masę w kilogramach przez masę Słońca.

Wszystkie wartości znajdujące się w arkuszu trzeba przeliczyć na jednostki SI np. okres mierzony w latach trzeba przeliczyć na sekundy, dni świetlne na metry itd. W arkuszu obliczenia przygotowałem podstawowe przeliczniki: rok w sekundach oraz dzień świetlny w metrach. Znajdują się również w tym arkuszu takie stałe jak stała grawitacji G oraz masa Słońca w kilogramach.

## Arkusz „Obliczenia”

W arkuszu Obliczenia wykonujemy wszystkie obliczenia potrzebne do oszacowania masy.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data points:

| Obliczenia  |             |             |              |              |             |          | Ognisko 1   |             | Ognisko 2   |              | Środek elipsy |        |
|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|-------------|----------|-------------|-------------|-------------|--------------|---------------|--------|
|             | x           | y           | x            | y            | x           | y        | x           | y           | x           | y            | x             | y      |
| delta_gamma | 0,062831853 |             |              |              |             |          | 0,003415847 | 0,008069471 | 0,084584153 | -0,178069471 | 0,044         | -0,085 |
| gamma       | 0           | 0,115       | 0            | 0            | 0           | 0        |             |             |             |              |               |        |
| x_podst     | 0,114773074 | 0,003390688 | -0,004984326 | 0,01885033   | 0,020413642 | 7,18E-05 |             |             |             |              |               |        |
| y_podst     | 0,125663706 | 0,114093191 | 0,006767995  | -0,007808343 | 0,016877169 | 0,000113 |             |             |             |              |               |        |
| x_trans     | 0,188495559 | 0,112963034 | 0,010118591  | -0,010427897 | 0,014501944 | 0,000154 |             |             |             |              |               |        |
| y_trans     | 0,251327412 | 0,111387064 | 0,013429254  | -0,012832648 | 0,011734032 | 0,000195 |             |             |             |              |               |        |
| Pola        | 0,314159265 | 0,109371499 | 0,016686918  | -0,015013107 | 0,008584354 | 0,000237 |             |             |             |              |               |        |
| 1 rok =     |             |             |              |              |             |          |             |             | 31536000    | s            |               |        |
| 1 dz. Św =  |             |             |              |              |             |          | 25          | 902         | 068         | 371          | 200           | m      |
| Masa Słońca |             |             |              |              |             |          |             |             | 1,99E+30    | kg           |               |        |
| PI          |             |             |              |              |             |          |             |             | 3,141592654 |              |               |        |
| delta_P     |             |             |              |              |             |          |             |             | 31536       |              |               |        |

Rys. 16 Arkusz „Obliczenia”

Źródło: własne

Najistotniejszymi polami w tym arkuszu są pola  $\gamma$ ,  $x_{trans}$  oraz  $y_{trans}$ . Wykorzystujemy je do przygotowania wykresu dopasowanej elipsy.

Wartość w polu  $\gamma$  zmienia się co  $\Delta\gamma$  od zera. Jest to kąt biegunowy punktu elipsy.

Pole  $x_{trans}$  to współrzędna  $x$  punktu na elipsie. Liczymy go ze wzoru:

$$x_n = \cos(\alpha) \cdot a \cdot \cos(\phi_n) - \sin(\alpha) \cdot b \cdot \sin(\phi_n) + x_{sr}$$

Pole  $y_{trans}$  to współrzędna  $y$  punktu na elipsie. Liczymy go ze wzoru:

$$y_n = \sin(\alpha) \cdot a \cdot \cos(\phi_n) + \cos(\alpha) \cdot b \cdot \sin(\phi_n) + y_{sr}$$

W kolumnie „Pola” obliczane są pola pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami na elipsie. Jest to potrzebne do wyliczenia okresu obiegu gwiazdy.

### **Arkusz „Dane do wyliczenia okresu”**

Arkusz ten służy do oszacowania okresu obiegu gwiazdy wokół czarnej dziury. Klikając przycisk „Znajdź bliskie punkty” skrypt wypisuje nam współrzędne oraz kąt  $\gamma$  najbliższych punktów na elipsie do punktów danych. Po przyciśnięciu przycisku „Wylicz pola” skrypt liczy nam również pola wodzące pomiędzy dwoma punktami na dopasowanej elipsie. Z II prawa Keplera wiemy, że w stałej jednostce czasu ciało niebieskie zakreśla linią łączącą siebie i obiegane ciało równe pola – może to nam posłużyć do obliczenia okresu obiegu.

**Dane do wyliczenia okresu obieg gwiazdy S2 wokół czarnej dziury**

Znajdź bliskie punkty      Oblicz pola

| Nr | Czas     | x            | y        | kat      | Nr w Obliczeniach | Nr    | Pole       | Czas AT | Okres    |
|----|----------|--------------|----------|----------|-------------------|-------|------------|---------|----------|
| 1  | 1992.226 | 0.108045294  | -0.16704 | 3.644247 | 58                | 1-2   | 0.00125756 | 2.095   | 32.50102 |
| 2  | 1994.321 | 0.09570644   | -0.18693 | 3.267256 | 52                | 2-3   | 0.00060547 | 1.210   | 38.98905 |
| 3  | 1995.531 | 0.08666166   | -0.1916  | 3.078761 | 49                | 3-4   | 0.00058878 | 0.725   | 24.02313 |
| 4  | 1996.256 | 0.07610557   | -0.1925  | 2.890265 | 46                | 4-5   | 0.00058878 | 0.172   | 5.69928  |
| 5  | 1996.428 | 0.07610557   | -0.1925  | 2.890265 | 46                | 5-6   | 0.00112750 | 1.115   | 19.29293 |
| 6  | 1997.543 | 0.05199568   | -0.18298 | 2.513274 | 40                | 6-7   | 0.00071715 | 0.822   | 22.36156 |
| 7  | 1998.365 | 0.035077331  | -0.16882 | 2.261947 | 36                | 7-8   | 0.00052232 | 1.100   | 41.08606 |
| 8  | 1999.465 | 0.02269143   | -0.15468 | 2.073451 | 33                | 8-9   | 0.00134678 | 1.009   | 14.61624 |
| 9  | 2000.474 | -0.005520139 | -0.10653 | 1.570796 | 25                | 9-10  | 0.00134678 | 0.049   | 0.79807  |
| 10 | 2000.523 | -0.005520139 | -0.10653 | 1.570796 | 25                | 10-11 | 0.00099147 | 0.979   | 19.26395 |
| 11 | 2001.502 | -0.018925425 | -0.0662  | 1.193805 | 19                | 11-12 | 0.00221942 | 0.750   | 6.592714 |
| 12 | 2002.252 | -0.016870573 | 0.005126 | 0.376991 | 6                 | 12-13 | 0.00072779 | 0.082   | 2.198123 |
| 13 | 2002.334 | -0.00770644  | 0.016929 | 0.125664 | 2                 | 13-14 | 0.01854668 | 0.074   | 0.077841 |
| 14 | 2002.408 | 0.00822993   | 0.022627 | 6.09469  | 97                | 14-15 | 0.00120111 | 0.167   | 2.712538 |
| 15 | 2002.575 | 0.031812028  | 0.015581 | 5.717699 | 91                | 15-16 | 0.00041473 | 0.075   | 3.52311  |
| 16 | 2002.650 | 0.040228391  | 0.009985 | 5.592035 | 89                | 16-17 | 0.00171966 | 0.564   | 6.398487 |
| 17 | 2003.214 | 0.073159897  | -0.02616 | 5.08938  | 81                | 17-18 | 0.00022051 | 0.139   | 12.29771 |
| 18 | 2003.353 | 0.076924452  | -0.03193 | 5.026548 | 80                | 18-19 | 0.00022144 | 0.101   | 8.89845  |
| 19 | 2003.454 | 0.080559069  | -0.03791 | 4.963716 | 79                |       |            |         |          |

P^2\*a^2=b^2      0,019509

**Rys. 17** Arkusz „Dane do wyliczenia okresu”

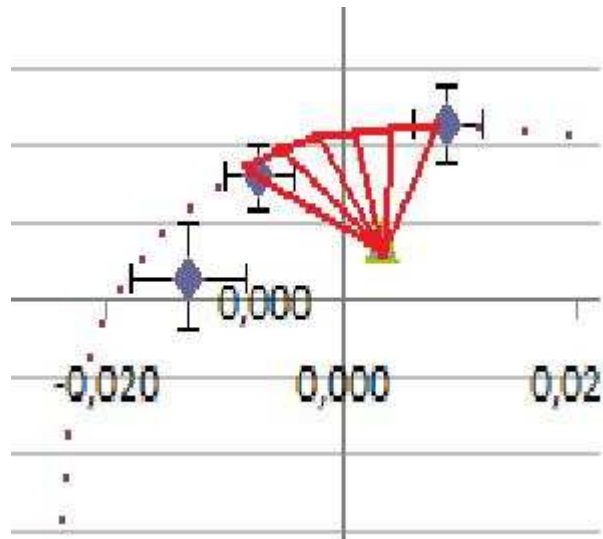
Źródło: własne

Aby policzyć pola trzeba podzielić pole elipsy na trójkąty. Wierzchołkami każdego trójkąta jest ognisko elipsy oraz dwa punkty na dopasowanej elipsie. Sumując takie trójkąty otrzymujemy przybliżone pole powierzchni pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami, które znajdują się najbliżej danych punktów.

Założmy, że punkt ogniska oznaczymy przez punkt A(x1,y1), pierwszy z punktów na elipsie B(x2,y2) oraz drugi punkt na elipsie C(x3,y3). Pole pojedynczego trójkąta obliczymy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix}$$

Sumując takie pojedyncze trójkąty pomiędzy dwoma punktami pomiarowymi otrzymujemy pole wodzące gwiazdy.



**Rys. 18 Sumujemy pola trójkątów aby policzyć pole wodzące gwiazdy**

**Źródło: własne**

### **Arkusz „Dane”**

W tym arkuszu znajdują się współrzędne gwiazdy obiegającej supermasywną czarną dziurę otrzymane z teleskopu ESO VLT.

## V. Wnioski i wyniki

Astronomowie od wielu lat przewidywali, że w centrach większości galaktyk znajdują się czarne dziury. Ich obecność w tych miejscach może być bardzo istotna, bo mogą one wpływać na procesy formowania się gwiazd. Niestety obserwacja tych ciał jest bardzo trudna, bo emitują promieniowanie elektromagnetyczne w większości w zakresie rentgenowskim. I to nie zawsze, bo jeżeli mówimy o czarnej dziurze stacjonarnej, czyli nie ściągającej żadnej materii z bliskiego otoczenia, to o takim promieniowaniu nie może być mowy. Łatwość obserwacji zależy więc od obecności materii w pobliżu czarnej dziury. Jeśli znajduje się ona wystarczająco blisko i jest jej również wystarczająco dużo to czarna dziura emituje promieniowanie przez większą część czasu, jak również tworzy bardzo jasny dysk akrecyjny.

Nietrudno zauważyć, że odkrycie czarnej dziury w kwazarze 3C 273 było łatwiejsze za sprawą dużej ilości materii oraz dużej jej gęstości w tym miejscu. Niestety tak się składa, że kwazary są bardzo odległe od nas, a to rodzi wiele problemów przy dokładniejszych obserwacjach. Głównie chodzi tu o to, że światło przemierzając tak dużą odległość przez ośrodek międzygwiazdowy zmniejsza swoje natężenie, a po drodze część światła zatrzymywana jest na obłokach materii międzygwiazdowej. Za sprawą tego nie znamy pełnej natury tych ciał. Trudno też powiedzieć coś więcej o czarnej dziurze. Głównym potwierdzeniem istnienia czarnej dziury w kwazarze 3C 273 była obecność dysku akrecyjnego oraz wyrzutu materii w postaci jeta.

Na szczęście czarne dziury o ogromnej masie znajdują się bliżej nas. Obiekty te znajdują się w centrach bliższych galaktyk. Wśród grupy tych galaktyk znajduje się też nasza Droga Mleczna.

Czarna dziura w Drodze Mlecznej znajduje się w radioźródle Sagittarius A\*. Niestety wielkim problemem jest jej obserwacja. Nie tworzy ona dysku

akrecyjnego, a emitowanie promieniowania rentgenowskiego zdarza się bardzo rzadko. Powodem tego jest mała ilość materii w pobliżu czarnej dziury. Czarna dziura ta nie jest więc taka efektowna jak w przypadku kwazara 3C 273. Dlatego przez większość czasu supermasywna czarna dziura w tym miejscu była niezauważona, mimo że naukowcy przypuszczali obecność takiego ciała w Drodze Mlecznej.

Wielkim sukcesem zakończyła się obserwacja gwiazd znajdujących się w centrum naszej galaktyki. Obserwacje te niestety wymagały wielu lat. Podczas obserwacji odkryto dziwnie zachowującą się gwiazdę, która w pewnym okresie czasu znajdowała się prawie w punkcie centrum Drogi Mlecznej. To zrodziło szansę na wyznaczenie masy ciała, które tak „kierowało” tą gwiazdą. Obliczenia potwierdziły przypuszczenia – w tym miejscu znajduje się supermasywna czarna dziura.

Tak samo jak astronomowie podjąłem się zadania obliczenia masy supermasywnej czarnej dziury w Drodze Mlecznej. Zadanie opiera się na ćwiczeniu ESO Astronomical Exercise. W ćwiczeniu znajdujemy współrzędne gwiazdy obiegającej czarną dziurę w różnym okresie czasu.

| Nr | Czas     | x [arc sec] | y [arc sec] | dx [arc sec] | dy [arc sec] |
|----|----------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1  | 1992,226 | 0,104       | -0,166      | 0,003        | 0,004        |
| 2  | 1994,321 | 0,097       | -0,189      | 0,003        | 0,004        |
| 3  | 1995,531 | 0,087       | -0,192      | 0,002        | 0,003        |
| 4  | 1996,256 | 0,075       | -0,197      | 0,007        | 0,010        |
| 5  | 1996,428 | 0,077       | -0,193      | 0,002        | 0,003        |
| 6  | 1997,543 | 0,052       | -0,183      | 0,004        | 0,006        |
| 7  | 1998,365 | 0,036       | -0,167      | 0,001        | 0,002        |
| 8  | 1999,465 | 0,022       | -0,156      | 0,004        | 0,006        |
| 9  | 2000,474 | 0,000       | -0,103      | 0,002        | 0,003        |
| 10 | 2000,523 | -0,013      | -0,113      | 0,003        | 0,004        |
| 11 | 2001,502 | -0,026      | -0,068      | 0,002        | 0,003        |
| 12 | 2002,252 | -0,013      | 0,003       | 0,005        | 0,007        |
| 13 | 2002,334 | -0,007      | 0,016       | 0,003        | 0,004        |
| 14 | 2002,408 | 0,009       | 0,023       | 0,003        | 0,005        |
| 15 | 2002,575 | 0,032       | 0,016       | 0,002        | 0,003        |
| 16 | 2002,650 | 0,037       | 0,009       | 0,002        | 0,003        |
| 17 | 2003,214 | 0,072       | -0,024      | 0,001        | 0,002        |
| 18 | 2003,353 | 0,077       | -0,030      | 0,002        | 0,002        |
| 19 | 2003,454 | 0,081       | -0,036      | 0,002        | 0,002        |

Problem znalezienia parametrów orbity gwiazdy rozwiązałem z pomocą geometrycznego dopasowania elipsy do punktów pomiarowych opierając się na biegunowych równiach elipsy. Każdy punkt pomiarowy jest obarczony pewną niepewnością, co rodzi problem dokładnego obliczenia masy.

Wszelkie obliczenia wykonałem w programie Microsoft Excel. Pomocna była znajomość języka Visual Basic, która ułatwiła obliczenia.

Dopasowując parametry elipsy znalazłem najbardziej pasujące do punktów pomiarowych. Parametry te wynoszą odpowiednio:

Wielka półoś a:

**a = 4,715 dni świetlnych**

Mała półoś b:

**b = 2,214 dni świetlnych**

Orbita ma więc mimośród równy 0,882898.

Okres obiegu gwiazdy obliczyłem dzieląc elipsę na trójkąty. Sumując takie mniejsze trójkąty otrzymujemy przybliżone pole wodzące gwiazdy w odstępie czasu, a to z II prawa Keplera pozwoliło mi obliczyć okres biegu. Okres obiegu wynosi:

**P = 14,51367 lat**

Wyznaczone parametry pozwoliły mi na wyliczenie masy czarnej dziury ze wzoru:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2 G}$$



Niepewność pomiarową masy obliczymy ze wzoru:

$$\sigma = \left| \frac{\partial M}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial M}{\partial P} \right| \Delta P$$

Obliczona masa wynosi:

$$M = 5,14 \cdot 10^{36} \text{ kg} \pm 3,98 \cdot 10^{33} \text{ kg}$$

A to jest:

$$M_s = 2,58 \text{ mln mas Słońca} \pm 2 \text{ tys. mas Słońca}$$

Masa literaturowa:

$$M = 6,5 \cdot 10^{36} \text{ kg} \pm 2,0 \cdot 10^{36} \text{ kg}$$

Masa literaturowa w masach Słońca:

$$M_s = 3,3 \cdot 10^6 \text{ mas Słońca} \pm 1,0 \cdot 10^6 \text{ mas Słońca}$$

Największy wpływ na wartość masy ma wielka półość orbity. Zmieniając jej wartość o 0,001 arc sec masa zmienia się o  $0,13 \cdot 10^{36}$  kg. Im wielka półość jest większa tym masa też jest większa. Okres obiegu ma mniejszy wpływ, bo we wzorze jest w potęgze drugiej. Zmienia on masę o  $0,01 \cdot 10^{36}$  kg co 0,014 roku. Im większy okres obiegu tym masa jest mniejsza.

Widać, że otrzymana masa jest ogromna. Nie istnieje żadna gwiazda mająca taką masę. Jedynym ciałem o takiej masie i tak małych rozmiarów może być supermasywna czarna dziura.

Porównując wynik z wynikiem obliczonym przez astronomów widzimy pewne odchylenia, ale znajdujące się w granicach błędu pomiarowego. Może on być spowodowany małą liczbą punktów na dopasowanej elipsie.

## VI. Instrukcja

### Temat: Oszacowanie masy supermasywnej czarnej dziury w centrum Drogi Mlecznej

Pojęcia: prawa Keplera, własności orbit planet

Na początku 17 wieku znany uczyony Johannes Kepler wyprowadził trzy prawa nazwane jego nazwiskiem, które to opisują ruch planet wokół Słońca:

1. Planety poruszają się po orbitach eliptycznych wokół Słońca, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.
2. Pole A zakreślone przez linię łączącą Słońce i planetę w danej jednostce czasu jest takie samo.

$$\frac{A}{\Delta t} = const$$

3. Kwadrat okresu obiegu planety jest proporcjonalny do sześciangu wielkiej półosi orbity.

Wyprowadzono na podstawie III prawa, że okres P można obliczyć z poniższego wzoru:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

,gdzie:

G – stała grawitacji

$m_1$  – masa Słońca

$m_2$  – masa planety

a – wielka półoś orbity planety

### Zadanie 1 (opcjonalne)

Pierwsze prawo Keplera mówi nam, że planety poruszają się po elipsie. Elipsa o środku w punkcie (0,0) jest krzywą, która przechodzi przez punkty (x,y) spełniające poniższe równanie:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Przyjmijmy, że:

a = 10

b = 5

W arkuszu Excela wylicz kilka punktów (x,y).

## Zadanie 2 (opcjonalne)

Oblicz sumaryczną masę Ziemi i Słońca używając III prawa Keplera wiedząc, że wielka półoś orbity Ziemi wynosi 150 milionów kilometrów, okres obiegu wynosi 1 rok oraz znając wartość stałej  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ .

## Zadanie 3

Otwórz dokument Excela z ćwiczeniem. Do wyboru są tutaj cztery arkusze: „Dopasowanie”, „Obliczenia”, „Dane” oraz „Dane do wyliczenia okresu”. Otwórz arkusz „Dopasowanie”. Za pomocą przycisków ustal parametry elipsy, która jest orbitą obiegającej supermasywną czarną dziurę gwiazdy S2. Możesz zmieniać takie parametry jak: wielka półoś  $a$ , mała półoś  $b$ , współrzędne środka elipsy, nachylenie elipsy. Dobierz parametry tak, aby po wciśnięciu przycisku „Sprawdź” w sąsiedniej komórce wartość była jak najmniejsza.

## Zadanie 4

Otwórz arkusz „Dane do wyliczenia okresu”. Przyciśnij przycisk „Znajdź najbliższe”  wyświetli się lista punktów najbliższych do punktów pomiarowych. Następnie użyj przycisku „Oblicz pola” aby obliczyć pola wodzące gwiazdy. Znając pola oraz odstęp czasu  $\Delta T$  oblicz okres obiegu gwiazdy. Obliczony okres wprowadź do arkusza „Dopasowanie” w polu „Okres obiegu P”. Odczytaj masę czarnej dziury w polu „Masa” oraz „Masa w masach Słońca”.

## Bibliografia

1. Marek A. Abramowicz, Włodek Kuźniak *Na krawędzi czarnej dziury* Świat Nauki 1/2006 s. 27-35
2. Krzysztof Z. Stanek, Bohdan Paczyński *Soczewkowanie grawitacyjne* Postępy Astronomii 3/93 s.100 Polskie Towarzystwo Astronomiczne
3. Ewa L. Łokas *Czego nie widać* Wiedza i Życie 6/1995 s. 28-32
4. Fulvio Melia *Na skraju nieskończoności* Wydawnictwo Amber 2005
5. Ken Crosswell *Alchemia nieba* Wydawnictwo Prószyński i S-ka Warszawa 1997
6. Igor Nowikow *Czarne dziury i wszechświat* Wydawnictwo Prószyński i S-ka 1995
7. J. M. Kreiner *Astronomia z astrofizyką* Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa 1988
8. A. Opolski, H. Cugier, T. Ciurla *Wstęp do astrofizyki* Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego Wrocław 1995