

Czarne dziury: obiekty odkryte w przyrodzie czy wymyślone przez człowieka?

Jerzy Kijowski
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN
Aleja Lotników 32/46, 02-668 Warszawa

Na podstawie odczytu wygłoszonego w dniu 24 maja 2007

1 Rola spekulacji teoretycznych w fizyce

Fizyka jest nauką empiryczną. Tę prawdę wbijano mi do głowy przez całe dzieciństwo i młodość, ostro przeciwstawiając „postępowe” nauki doświadczalne „scholastycznym spekulacjom”, które jedynie hamowały rozwój cywilizacji. Taka postawa filozoficzna nie jest nowa. Wyraziście była eksponowana np. w dziele Sykstusa Empiryka napisanym około roku 200., a zatytułowanym bardzo wymownie: „Przeciw Matematykom” (*Προς μαθηματικούς*).

A tymczasem u podstaw nowożytnej fizyki leżą mocno spekulatywne zasady dynamiki Galileusza-Newtona! Rzeczywiście: czy ktoś z nas miał kiedykolwiek do czynienia w potocznym doświadczeniu z pojazdem, który porusza się ruchem jednostajnym mimo, że nie działa nań żadna siła (bo np. wyczerpała się benzyna)?

Nieraz więc bywało tak, że nauka rozwijała się *właśnie* dzięki czysto teoretycznym „spekulacjom”, a przewidywane w ten sposób obiekty czy zjawiska fizyczne musiały potem długo jeszcze czekać na „prawdziwe” – to znaczy eksperymentalne – odkrycie, stanowiące ostateczne potwierdzenie słuszności rozumowania, które doprowadziło do ich pierwszego – teoretycznego – odkrycia.

Tak się zdarzyło np. przewidzianym przez Maxwella falom elektromagnetycznym. Pojawiły się one jako matematycznie konieczne rozwiązania równań

elektrodynamiki, gdy ich twórca poprawił równanie Ampère'a z czysto „spekulatywnych” powodów, wprowadzając doń tzw. *prąd przesunięcia*, by stało się zadość prawu zachowania ładunku. Podnosząc to prawo do rangi podstawowej zasady uniwersalnej Maxwell odkrył „po raz pierwszy” fale radiowe, bez których trudno sobie wyobrazić nasze współczesne życie. A przecież na drugie – doświadczalne – odkrycie musiały potem czekać jeszcze prawie 40 lat, kiedy to zostały „wprzęgnięte w służbę ludzkości” przez Heinricha Hertza, Guglielmo Marconi’ego lub Aleksandra Popowa, w zależności od tego w jakim kraju i w jakim ustroju politycznym kończyliśmy szkołę.

Tak zwane „czarne dziury”, podobnie zresztą jak fale grawitacyjne, są matematycznie konieczną konsekwencją nowoczesnej teorii grawitacji sformułowanej w 1915 roku przez Alberta Einsteina. Nie dysponujemy do tej pory wynikami obserwacji, które w sposób niewątpliwy dowodziłyby ich istnienia w Kosmosie, choć mamy wiele pośrednich argumentów za tym, by pewne obiekty astronomiczne interpretować właśnie jako czarne dziury. Status epistemologiczny „czarnych dziur” jest więc obecnie analogiczny do statusu fal radiowych w roku – powiedzmy - 1870.

2 Czy grawitacja da się sprowadzić do czystej geometrii?

Historia einsteinowskiej teorii grawitacji, popularnie zwanej „ogólną teorią względności” też zaczęła się od czystej spekulacji. Wspaniale rozwinięta w XIX-tym wieku mechanika nieba, oparta na teorii newtonowskiej, znakomicie tłumaczyła obserwowane zjawiska astronomiczne i z czysto eksperymentalnego punktu widzenia nie było żadnych powodów, by tę teorię zmieniać. Tymczasem jednak w 1905 roku Einstein zaproponował nową teorię ruchu i nowy opis pola elektromagnetycznego. Chodziło o to, by wytłumaczyć m. in. zaobserwowany fakt niezależności prędkości światła od prędkości mierzącego ją obserwatora. Ta nowa teoria, zwana „szczególną teorią względności”, odniosła ogromny sukces, dostarczając znakomitego narzędzia do opisu zjawisk fizycznych polegających na oddziaływaniu elektromagnetycznym – i to opisu zgodnego z doświadczeniem Michelsona-Morley’a. Ponieważ miała ona charakter uniwersalnej teorii czasu i przestrzeni, wielki myśliciel jakim był Einstein spróbował teraz opisać siły grawitacyjne w swoim nowym, czterowymiarowym, „relatywistycznym” formalizmie. Okazało się to niemożliwe, a

w każdym razie nie było na to żadnej prostej i naturalnej recepty. Po kilku latach rozmyślań Einstein doszedł do wniosku, że trajektorie swobodnie spadających ciał (to znaczy ciał poddanych jedynie działaniu sił grawitacyjnych) są po prostu „najbardziej prostymi ze wszystkich możliwych” liniami w (prawdopodobnie) krzywej czasoprzestrzeni. Punktem wyjścia do tej hipotezy była powszechnie obserwowana równość masy inercjalnej i masy grawitacyjnej różnych ciał – począwszy od skali przysłowiowego newtonowskiego jabłka, do skali obserwowanych ciał niebieskich. Łatwo zrozumieć o co chodzi, przyglądając się np. równaniu Newtona opisującemu ruch ciała o masie m i ładunku elektrycznym e , poruszającego się pod wpływem pola elektrycznego \vec{E} :

$$m\vec{a} = e\vec{E} . \quad (1)$$

Ciała o równych masach ale różnych ładunkach poruszają się zupełnie inaczej! Tymczasem dla sił grawitacyjnych analogiczne równanie Newtona wygląda następująco:

$$m\vec{a} = m\vec{G} , \quad (2)$$

gdzie przez \vec{G} oznaczyłem „pole sił grawitacyjnych” (równe np. gradientowi potencjału grawitacyjnego z ujemnym znakiem). Występujący po lewej stronie czynnik m mierzy bezwładność ciała – podobnie jak to miało miejsce w przypadku równania (1). Natomiast występująca po prawej stronie wielkość m odgrywa rolę „ładunku grawitacyjnego” i mierzy „wrażliwość ciała” na oddziaływanie pola grawitacyjnego. Z punktu widzenia teorii Newtona to m po prawej stronie mogłoby być różne od tego m po lewej stronie i nie prowadziłyby to do żadnych komplikacji filozoficznych. Tymczasem jednak wszelkie pomiary (począwszy od Galileusza, rzucającego ponoć różne przedmioty z wysokości Krzywej Wieży w Pizie) pokazują, że obie masy są sobie *zawsze* równe. Oznacza to, że równanie (2) można uprościć przez m . Wobec tego trajektorie ciał spadających swobodnie są takie same dla różnych ciał. Jabłko powinno poruszać się po takiej samej orbicie okołosłonecznej co planeta. Powinniśmy zatem traktować tę orbitę jako jakąś uniwersalną własność geometryczną czasoprzestrzeni w której „żyje” pole grawitacyjne \vec{G} , niezależną od tego, jakim ciałem (jabłkiem czy planetą) posługujemy się w celu jej zbadania. O jaką własność może tutaj chodzić?

Einstein znalazł odpowiedź w powstałej wcześniej geometrii nie-euklidesowej i zaproponował, by odejść od obrazu czasoprzestrzeni jako obiektu „idealnie płaskiego”, do którego stosują się pojęcia geometrii euklidesowej, znane nam z kursu szkolnego, na przykład takie jak możliwość absolutnego,

niezależnego od drogi, transportu równoległego wektorów na dowolne odległości. To, co w małej skali jest banalnie proste: należy przyłożyć ekierkę do linijki i przesunąć ją dożądanego punktu, w wielkiej skali jest – być może – niewykonalne. Czasoprzestrzeń w której żyjemy jest prawdopodobnie zakrzywiona, a ciała spadające swobodnie poruszają się po liniach „najbardziej prostych z możliwych”. Do linii tych nie stosują się twierdzenia geometrii euklidesowej, jak np. aksjomat Euklidesa o prostych równoległych, czy też twierdzenie o sumie kątów w trójkącie. Grawitacja to po prostu odstępstwo geometrii czasoprzestrzennej od „płaskości”. W dalszym ciągu tego wykładu pokażę jak najprościej można opisać taką strukturę.

3 Co to są linie „proste” w krzywej przestrzeni?

Najwcześniej poznana „krzywą przestrzeni”, dla której opis oparty na geometrii euklidesowej przestał wystarczać, była powierzchnia globu ziemskiego w dobie wielkich odkrywców geograficznych. Żeglując po oceanie najłatwiej jest trzymać się tzw. loksodromy, tzn. linii przecinającej siatkę geograficzną złożoną z południków i równoleżników pod stałym kątem. W takiej żegludze sternik musi po prostu trzymać ciągle ten sam kurs kompasowy. We współrzędnych geograficznych (θ, φ) równanie takiej trajektorii ruchu wygląda rzeczywiście tak, jak wyrażone we współrzędnych kartezjańskich równanie linii prostej na płaszczyźnie:

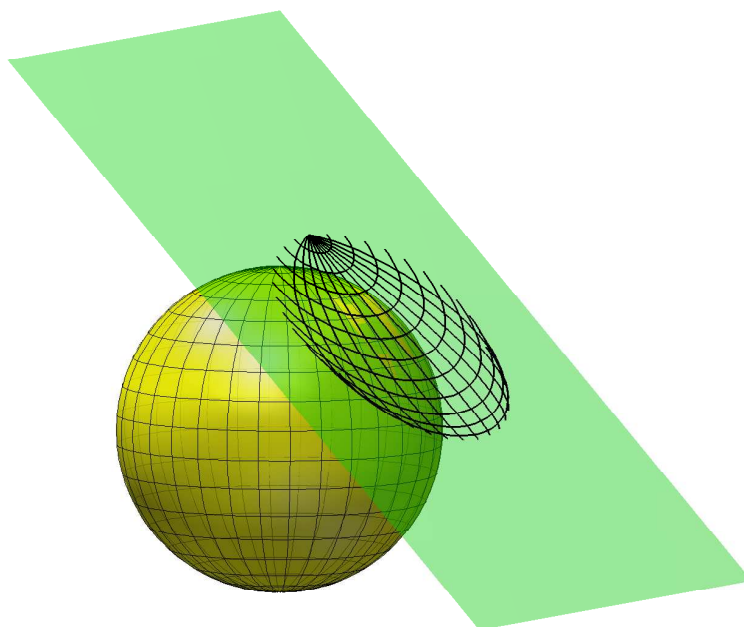
$$\theta(t) = \theta_0 + at, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + bt, \quad (3)$$

gdzie t jest jakimkolwiek parametrem afinicznym (na przykład czasem, gdy statek płynie ze stałą prędkością). Można te równania zapisać równoważnie w postaci warunku na znikanie drugich pochodnych obu funkcji:

$$\ddot{\theta}(t) = 0, \quad \ddot{\varphi}(t) = 0, \quad (4)$$

co gwarantuje liniową zależność obu funkcji od parametru.

Nazwa *loksodroma* pochodzi od greckich słów „loksós” – ukośny, oraz „droma” – linia prosta. Ale, pożałuj się Boże, cóż to za prosta! W żegludze po morzu Bałtyckim może być nawet przydatna, ale wystarczy popatrzeć na globus by zauważyć, że żegluga po loksodromie z Plymouth do Nowego Yorku to ogromna strata czasu! A w pobliżu biegunów loksodroma coraz bardziej



Rysunek 1: Rzut siatki geograficznej na płaszczyznę styczną do kuli.

zbliża się do spirali Archimedesesa i poruszanie się po niej przypominałoby raczej taniec Św. Wita niż jakiegokolwiek sensowne zmierzanie do celu.

Gdyby na globusie naciągnąć gumkę umocowaną na końcach w dwóch miastach leżących po różnych stronach oceanu, to wyznaczyłaby ona zupełnie inną trasę, zwaną „ortodromą”, czyli linią prostą. Jest to odcinek wielkiego koła na kuli i czujemy instynktownie, że wyznacza najkrótszą drogę między punktem startu a punktem docelowym.

Wyznaczanie ortodromy to najbardziej typowe zadanie, jakie rozwiązują studenci wydziału nawigacji w szkole morskiej. Trzeba się tu wyżyć nostalgii za funkcjami liniowymi typu (3), bowiem równanie różniczkowe opisujące ortodromę względem współrzędnych geograficznych (θ, φ) jest dużo bardziej skomplikowane niż warunek (4) na znikanie „przyśpieszenia”, tzn. drugich pochodnych. Aby je tutaj wyprowadzić zauważmy, że w każdym punkcie globu (θ_0, φ_0) można wybrać takie *lokalne* współrzędne (x, y) , żeby *przynajmniej w tym jednym punkcie* równanie ortodromy wyglądało tak jak (4):

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = 0. \quad (5)$$

W tym celu rozważymy płaszczyznę styczną do globusa w naszym „miejscu

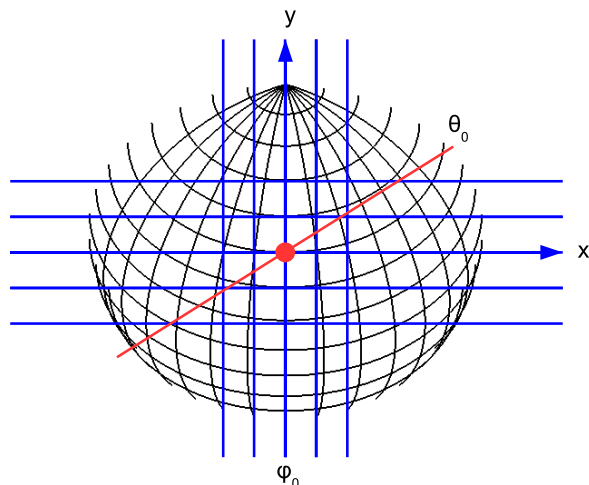
postoju” (θ_0, φ_0) – niech będzie to na przykład kartka papieru. Jak to widać na rysunku 1., rzut siatki geograficznej z globusa na naszą kartkę daje wysoce nie-prostoliniowy układ współrzędnych. Gdyby nasze miejsce postoju znajdowało się na lądzie, to siatka ta zupełnie nie nadawała by się jako lokalna mapa do celów geodezyjnych, takich jak: wytyczanie sieci równoległych ulic czy obrysów działek w naszej miejscowości.

Do tych celów najlepiej używać siatki współrzędnych kartezjańskich na kartce. Gdy zrzutujemy je (przy pomocy rzutu prostopadłego) z naszej kartki papieru na globus, otrzymamy właśnie lokalnie najlepsze, „wyprostowane” współrzędne. Wybierzmy na przykład oś X w kierunku wschodnim zaś oś Y – prostopadle, w kierunku północnym, przy czym, dla prostoty rachunków, niech obie będą zaczepione właśnie w naszym „miejscu postoju” (θ_0, φ_0) (zob. rys. 2.). Odrobina znajomości trygonometrii pozwoli nam stwierdzić, że zależność między współrzędnymi geograficznymi a naszymi „lokalnie prostoliniowymi” współrzędnymi (x, y) , skopiowanymi z płaskiej kartki, wyraża się następującymi wzorami:

$$\theta = \theta_0 - y + Ax^2 + \text{człony wyższego rzędu} , \quad (6)$$

$$\varphi = \varphi_0 + x(1 + By) + \text{człony wyższego rzędu} . \quad (7)$$

Pozwoliłem sobie na pewną nonszalancję w zapisie powyższych wzorów, bowiem chcę zwrócić uwagę na jego strukturę, a do tego ani wartość stałych A i B , ani szczegółowa informacja o członach rzędu wyższego niż kwadratowy, nie jest potrzebna. Otóż człony rzędu zerowego zostały wprowadzone tylko po to, by odpowiednio „scentrować” nasze współrzędne, tzn. by zero układu (x, y) przypadało właśnie w punkcie (θ_0, φ_0) . Wybór ten jest nieistotny z punktu widzenia naszego celu, jakim jest „wyprostowanie” równania ortodromy do najprostszej postaci (5). Człony rzędu pierwszego zostały wybrane tak, by osie X i Y były odpowiednio skierowane. Znak „minus” przed zmienną y w pierwszym równaniu pochodzi stąd, że jako matematyk liczę „szerokość geograficzną” θ od bieguna północnego w dół, na południe. Tymczasem jako nawigator wolę liczyć współrzędną y na mapie w górę, na północ. Ale to również jest *zupełnie* nieistotne z punktu widzenia naszego celu: dowolna transformacja liniowa współrzędnych (x, y) będzie równie dobra. Także człony wyższego rzędu są nieistotne, bowiem w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ nie dają wkładu do równania (5). To co istotne, to człony kwadratowe, reprezentowane tutaj przez dwie stałe: A i B . Odrobina znajomości trygonometrii



Rysunek 2: Współrzędne geograficzne a lokalne współrzędne „prostoliniowe”.

wystarczy, by się przekonać, że ich wartość wynosi:

$$A = \frac{1}{2} \sin \theta_0 \cos \theta_0, \quad B = \operatorname{ctg} \theta_0. \quad (8)$$

Gdybyśmy mieli osiąść na stałe w miejscowości (θ_0, φ_0) , to już nigdy inna mapa nie byłaby nam potrzebna: ta jest najlepsza ze wszystkich możliwych. Jeśli jednak punkt (θ_0, φ_0) znajduje się na oceanie a my jesteśmy navigatorami w podróży, to niestety nasza doskonała (w otoczeniu punktu (θ_0, φ_0)) mapa wkrótce się zdezaktualizuje i trzeba byłoby ją szybko wymienić na inną, dostosowaną do innego punktu. No ale nie możemy wozić ze sobą tak ogromnej ilości map: po jednej dla każdego małego otoczenia kolejno mijanych punktów globu! Przepróśmy się zatem z bardziej globalnymi współrzędnymi geograficznymi i przeliczmy równanie ortodromy (5) (oznaczonej kolorem czerwonym na rys. 2.) do tych współrzędnych. Różniczkując stronami wzory (6) i (7) otrzymujemy:

$$\dot{\theta} = -\dot{y} + 2Ax\dot{x}, \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = -\ddot{y} + 2A\dot{x}\dot{x} + 2Ax\ddot{x}, \quad (10)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{x} + Bx\dot{y} + B\dot{x}y, \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{x} + 2B\dot{x}\dot{y} + Bx\ddot{y} + B\dot{x}\ddot{y}. \quad (12)$$

Ale w zmiennych „wyprostowanych” równanie ortodromy to znikanie drugich pochodnych (5). Zatem w naszym punkcie postoju $(x, y) = (0, 0)$ równanie ortodromy wygląda następująco:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= 2A\dot{x}\dot{x} = 2A\dot{\varphi}^2, \\ \ddot{\varphi} &= 2B\dot{x}\dot{y} = -2B\dot{\varphi}\dot{\theta},\end{aligned}$$

(uwzględniono związki: $\dot{\theta} = -\dot{y}$ oraz $\dot{\varphi} = \dot{x}$, wynikające z (9) i (11)). Po wstawieniu wartości stałych (8) otrzymujemy następujące równanie ortodromy:

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (13)$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}\dot{\theta} \operatorname{ctg} \theta, \quad (14)$$

obowiązujące już uniwersalnie, w każdym punkcie (θ, φ) , tzn. na całym globie.

Powyższe, prościutkie opowiadanie można teraz sformalizować w postaci następującej „wylizanki” istotnych z naszego punktu widzenia własności, jakie wykorzystaliśmy do stworzenia wygodnego modelu matematycznego powierzchni globu ziemskiego M jako tzw. przestrzeni ze strukturą *powiązania*. Przestrzeń ta może być krzywa, ale lokalnie przypomina przestrzeń afiniczną, w której jest dobrze określone pojęcie linii prostej. Oto te własności:

- Przestrzeń M jest rozmaitością różniczkowalną. Oznacza to, że lokalnie można parametryzować punkty zbioru M układem współrzędnych $(x^k) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, gdzie liczba naturalna n nazywa się *wymiarem* przestrzeni (dla powierzchni globu ziemskiego było $n = 2$, ale to nie ma żadnego znaczenia). Jeśli (y^a) , $a = 1, \dots, n$; jest innym układem współrzędnych (mapą), to (tam gdzie to możliwe) transformacja $y^a = y^a(x^k)$ jest odpowiednio gładka (np. różniczkowalna klasy C^∞).
- W każdym punkcie $m \in M$ można wprowadzić relację równoważności \sim_m między układami współrzędnych wokół m . Powiemy mianowicie, że układy (x^k) oraz (y^a) są równoważne w m jeśli ich wzajemne drugie pochodne znikają w tym punkcie:

$$\left((x^k) \sim_m (y^a) \right) \iff \left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^l}(m) = 0 \right).$$

Łatwo sprawdzić, że jest to rzeczywiście relacja równoważności (zwrotna, symetryczna, przechodnia). Zatem zbiór wszystkich map wokół m rozpada się na (wzajemnie rozłączne) klasy równoważności.

- W każdym punkcie m jest wyróżniona pewna klasa równoważności \mathcal{I}_m , którą nazwiemy „lokalnym układem prostoliniowym” lub też – żeby podkreślić inspirację fizyczną – „lokalnym układem inercjalnym”. Współrzędne odpowiadające mapie należącej do tej klasy będziemy nazywali „lokalnie prostoliniowymi” albo „lokalnie inercjalnymi” w punkcie m . Zakładamy, że \mathcal{I}_m zależy gładko (różniczkowalnie) od punktu m . Na razie nie będę precyzował co to oznacza, ale w dalszym ciągu układu stanie się to jasne.
- Sparametryzowaną linię w M będziemy nazywali ortodromą (czy może nawet – nadużywając nieco terminologii – linią „prostą”, a w każdym razie „najprostszą z możliwych”) jeśli w każdym punkcie M spełnia ona warunek

$$\ddot{y}^a(m) = 0, \quad (15)$$

gdy jako współrzędne weźmiemy dowolne współrzędne lokalnie inercjalne w m , tzn. należące do klasy \mathcal{I}_m .

- Współrzędne inercjalne w jednym punkcie wcale nie muszą być inercjalne w punktach sąsiednich. Gdyby jednak istniał układ współrzędnych *globalnie inercjalny*, to taką przestrzeń nazwalibyśmy *płaską*.

Gdybyśmy mieli zamieszkać na stałe w miejscowości m i badać jedynie ruchy przejeżdżających przez nią pojazdów, to nie warto byłoby używać innych układów współrzędnych, jak tylko inercjalne w punkcie m . Jeśli jednak interesują nas zjawiska zachodzące daleko od nas, jeśli chcemy badać ruchy odległych planet, komet, czy może nawet gwiazd albo galaktyk, to – podobnie jak to miało miejsce w przypadku nawigacji po ziemskim globie – zmuszeni będziemy używać układów nie-inercjalnych, ale za to opisujących dużo większe obszary. Przeliczmy zatem równania ortodromy z układu inercjalnego (y^a) do jakiegokolwiek układu (x^k). Prawo transformacji prędkości z jednego układu do drugiego jest oczywiste:

$$\dot{y}^a = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \dot{x}^k = \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \dot{x}^k. \quad (16)$$

W ostatnim wyrażeniu opuściliśmy znak sumy, korzystając z tak zwanej *konwencji sumacyjnej Einsteina*, która bardzo ułatwia pisanie formuł opisujących struktury geometrii różniczkowej. Głosi ona, że powtórzony wskaźnik

– w naszym przypadku „ k ” – raz na dole, raz na górze oznacza sumowanie po wszystkich jego możliwych wartościach. Różniczkując jeszcze raz po parametrze otrzymujemy następujące równanie ortodromy wyrażone w nieinercyjnym układzie współrzędnych (x^k) (pamiętamy o konwencji sumacyjnej!):

$$0 = \ddot{y}^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \ddot{x}^k + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^l} \dot{x}^k \dot{x}^l . \quad (17)$$

Powyższy układ n równań można przepisać w równoważnej postaci, jeśli podzielimy na obie strony macierzą $(\partial x^n / \partial y^a)$, odwrotną do macierzy $(\partial y^a / \partial x^k)$ (ich iloczyn daje macierz jednostkową (δ_k^n)). W rezultacie otrzymamy następujące, uniwersalne równanie ortodromy, będące naturalnym uogólnieniem równań nawigatora (13) oraz (14):

$$\ddot{x}^n + \Gamma_{kl}^n \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 . \quad (18)$$

Symbolem Γ_{kl}^n oznaczyliśmy tutaj następującą kombinację pochodnych:

$$\Gamma_{kl}^n(m) := \frac{\partial x^n}{\partial y^a}(m) \cdot \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^l}(m) . \quad (19)$$

We wzorze tym (y^a) są *dowolnymi* współrzędnymi inercyjnymi w punkcie m , w którym liczymy wartość współczynników Γ . Łatwo widać, że wynik nie zależy od wyboru układu współrzędnych (y^a), byle tylko należały do klasy \mathcal{I}_m . Wielkości te charakteryzują jednoznacznie układ inercjalny \mathcal{I}_m względem naszych (dowolnych), „roboczych” współrzędnych (x^k). Można zatem powiedzieć, że cała informacja o polu lokalnych układów inercjalnych jest zawarta we „współczynnikach powiązania” Γ_{kl}^n . W szczególności: układ jest inercjalny w punkcie m jeśli współczynniki te znikają w tym punkcie:

$$\left((x^k) \in \mathcal{I}_m \right) \iff \left(\Gamma_{kl}^n(m) = 0 \right) .$$

Założenie o „gładkiej zależności” klasy \mathcal{I}_m od punktu m oznacza teraz, że elementy tablicy $\Gamma_{kl}^n(m)$ są odpowiednio gładkimi funkcjami na przestrzeni M .

To opowiadanie można ciągnąć dalej: np. łatwo wyprowadzić wzory na transformacje obiektu Γ między dwoma dowolnymi (naogół *nie-inercyjnymi*) układami współrzędnych. Zainteresowanych odsyłam do obfitej literatury z geometrii różniczkowej. Ale główna własność przestrzeni z powiązaniem, to istnienie pola lokalnych układów inercjalnych, co pozwala na wyróżnienie szczególnych linii „prostych”, dla których „przyśpieszenie” – liczone w układzie inercyjnym – znika.

4 Grawitacja jako pole lokalnych układów inercjalnych

I właśnie taka struktura geometryczna czasoprzestrzeni odpowiada polu grawitacyjnemu według Einsteina. Równania ruchu ciała spadającego swobodnie, to równania ortodromy (18) w czterowymiarowej czasoprzestrzeni, które można przepisać jako:

$$m\ddot{x}^n = -m\Gamma_{kl}^n \dot{x}^k \dot{x}^l . \quad (20)$$

Interpretację tradycyjną, gdzie prawa strona jest siłą grawitacyjną działającą na ciało o masie m , zgodnie z drugą zasadą Newtona, Einstein proponuje zastąpić interpretacją geometryczną: prawa strona tylko dlatego nie znika, że do opisu ruchu użyliśmy układu odniesienia, który nie jest inercjalny! Siły grawitacyjne dadzą się (lokalnie, w punkcie m) wyeliminować, jeśli tylko przejdź do układu *inercjalnego* w punkcie m . I nie jest to żadna *science fiction*, lecz realna możliwość. Sto lat temu polegała ona na zamknięciu się w swobodnie spadającej windzie, gdzie (zanim nastąpi katastrofa) znajdziemy się w stanie całkowitej nieważkości: będziemy mogli uważać, że sił grawitacyjnych nie ma! W dzisiejszych czasach stan nieważkości stał się powszechnym doświadczeniem wielu ludzi: astronautów i pracowników stacji kosmicznych.

Siły grawitacyjne uzyskały zatem status „sił pozornych” z mechaniki klasycznej, takich jak siła odśrodkowa czy Coriolisa. Siły te są proporcjonalne do masy ciała. Można je wyeliminować poprzez wybór odpowiedniego (inercjalnego!) układu odniesienia. Możliwość sprawdzenia, czy „nasz układ odniesienia” jest inercjalny „względem odległych gwiazd” bardzo absorbowwała myśl Ernesta Macha, którego idee wywarły duży wpływ na Einsteina, czemu dał on wielokrotnie wyraz w swych pismach. Pasażer obracającej się karuzeli – argumentował Mach – jeśli nie pozwolić mu na obserwacje gwiazd, nie potrafi stwierdzić, czy działające nań siły, to siły pozorne czy też „prawdziwe” siły grawitacyjne. Ze wstydem wyznam, że z wielkim trudem podążałem za niektórymi myślami Macha, spisany w języku *globalnych* układów odniesienia. Wydaje mi się, że cała sprawa staje się niezwykle prosta i klarowna, jeśli zrezygnujemy z globalnych układów odniesienia i całe rozważania ograniczymy do przytoczonej w niniejszym wykładzie dyskusji *lokalnej* struktury czasoprzestrzeni. W tej teorii dylemat Macha: działają na mnie siły pozorne (odśrodkowa i Coriolisa) czy grawitacyjne, nie ma żadnego znaczenia. Niezależnie od nazwy, siły te mogą zostać wyeliminowane. Ale tylko wyeliminowane *lokalnie*.

5 Jak mierzyć krzywiznę czasoprzestrzeni

Jeśli w zwykłej, płaskiej przestrzeni wybrać krzywoliniowy układ współrzędnych, to równania linii prostych staną się bardzo skomplikowane. Można się o tym łatwo przekonać, próbując napisać np. równanie prostej w układzie współrzędnych sferycznych, w pocziwej, znanej ze szkolnej „stereometrii”, trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wystąpią wtedy wysoce nietrywialne współczynniki powiązania Γ_{kl}^n . Część z nich – te mianowicie, które odpowiadają współrzędnym kątowym – pojawiła się już zresztą w niniejszym artykule pod postacią współczynników (8). Pokażemy teraz w jaki sposób odróżnić taką sytuację, gdy przestrzeń jest naprawdę prosta, a jedynie prezentuje się jakby była krzywa, bowiem używamy skomplikowanego, krzywoliniowego układu, od sytuacji, kiedy przestrzeń jest *naprawdę* krzywa. Rozpocniemy od „wyprostowania” krzywych współrzędnych (x^k) w jednym punkcie m za pomocą wzoru:

$$y^k := x^k + \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^k(m)x^i x^j + \text{poprawki trzeciego i wyższych rzędów} . \quad (21)$$

Aby się przekonać, że tak poprawione współrzędne (y^k) są inercjalne w punkcie m wystarczy zauważyć, że zachodzi równość (19):

$$\Gamma_{ij}^k(m) = \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j}(m) = \frac{\partial x^k}{\partial y^a}(m) \cdot \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i \partial x^j}(m) , \quad (22)$$

bowiem macierz pierwszych pochodnych jest macierzą jednostkową. Czy nie dałoby się – do tej pory nieistotnych – poprawek wyższych rzędów dobrać tak, by wyprostować te współrzędne nie tylko w samym punkcie, ale i wokół niego? Na początku przynajmniej tak, by wyzerować w tym punkcie nie tylko współczynniki powiązania (co już się stało, jeśli tylko przejdziemy do zmiennych (y^a)), ale również ich pierwsze pochodne

$$\Gamma_{bcd}^a := \partial_d \Gamma_{bc}^a .$$

W tym celu znów zacznijmy poprawiać już raz poprawione współrzędne, przy czym istotne teraz będą poprawki wyższego rzędu, bowiem dadzą one wkład do pochodnych. Ogólna taka poprawka mogłaby wyglądać następująco:

$$\tilde{y}^a := y^a + \frac{1}{2}P_{bc}^a y^b y^c + \frac{1}{6}Q_{bcd}^a y^b y^c y^d . \quad (23)$$

Po to jednak, by coś naprawić, ale przy tym nie popsuć *już* znikających współczynników Γ_{bc}^a , musimy położyć $P_{bc}^a = 0$. Wtedy współczynniki te zmieniają się o drugie pochodne wyrazu trzeciego rzędu (czyli o człony liniowe, znikające w zerze) natomiast ich pochodne zmieniają się o trzecie pochodne, czyli o człon zerowego rzędu, wyznaczony przez tablicę współczynników Q_{bcd}^a . Z symetrii trzecich pochodnych wynika, że będzie to część całkowicie symetryczna tej tablicy. Ale gdyby Q_{bcd}^a zawierała cokolwiek poza tą częścią symetryczną, to owe „cokolwiek” (np. część antysymetryczna w jakichś dwu wskaźnikach) i tak nie da wkładu do poprawki (23). Aby zatem uprościć nasze rachunki możemy od początku założyć, że tablica Q_{bcd}^a jest całkowicie symetryczna:

$$Q_{bcd}^a = Q_{(bcd)}^a \quad (24)$$

$$:= \frac{1}{6} \{Q_{bcd}^a + Q_{cdb}^a + Q_{dbc}^a + Q_{dcb}^a + Q_{cbd}^a + Q_{bdc}^a\} . \quad (25)$$

Wtedy pochodne współczynników powiązania Γ w nowym układzie współrzędnych zmieniają się po prostu o Q :

$$\tilde{\Gamma}_{bcd}^a = \Gamma_{bcd}^a + Q_{bcd}^a , \quad (26)$$

które są całkowicie do naszej dyspozycji. Jak widać, potrafilibyśmy w ten sposób „zabić” całą tablicę pochodnych Γ_{bcd}^a jedynie wtedy, gdyby była ona całkowicie symetryczna: wystarczyłoby położyć $Q_{bcd}^a = -\Gamma_{bcd}^a$. W ogólnym przypadku, gdy Γ_{bcd}^a nie jest całkowicie symetryczna, zdołamy jedynie „zabić” jej część całkowicie symetryczną. Wynika stąd, że cała reszta, czyli to, co zostaje po odjęciu części całkowicie symetrycznej:

$$K_{bcd}^a = \Gamma_{bcd}^a - \Gamma_{(bcd)}^a , \quad (27)$$

nie zależy już od żadnych poprawek, tzn. jest pewną wielkością charakteryzującą badaną geometrię, niezależną od tego w jakim układzie współrzędnych (byle był inercjalny!) dokonujemy obliczeń. I rzeczywiście, po dokonaniu poprawek (23) otrzymujemy:

$$\tilde{K}_{bcd}^a = \tilde{\Gamma}_{bcd}^a - \tilde{\Gamma}_{(bcd)}^a = \Gamma_{bcd}^a + Q_{bcd}^a - \Gamma_{(bcd)}^a - Q_{(bcd)}^a = K_{bcd}^a , \quad (28)$$

na mocy równania (24). Wielkość K nazywa się *tensoriem krzywizny* przestrzeni M . Gdy jest ona różna od zera, to – jak widać z definicji – nie ma szans na istnienie globalnego układu inercjalnego, który „zabiłby” współczynniki Γ globalnie, bowiem zabiłby on również ich pochodne oraz, w szczególności,

ich kombinacje (27). A zatem znikanie tensora krzywizny jest warunkiem koniecznym na płaskość przestrzeni. Czy jest to również warunek dostateczny? Czy – po wyzerowaniu pierwszych pochodnych – będziemy musieli zająć się zerowaniem kolejnych i tak w nieskończoność?

Okazuje się, że nie będzie to potrzebne, bowiem zerowanie się tensora krzywizny K w „grubym” zbiorze pozwala już skonstruować współrzędne globalnie inercjalne w tym zbiorze. A zatem znikanie K jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na płaskość. Tensor krzywizny mierzy rzeczywiście *krzywiznę*, rozumianą jako niemożność skonstruowania globalnie inercjalnych współrzędnych. A mistyfikacja polegająca na zapisaniu współczynników powiązania *płaskiej* przestrzeni w krzywoliniowym układzie współrzędnych, przez co będą one wyglądały bardzo skomplikowanie, zostanie natychmiast odkryta gdy wyliczymy tensor krzywizny, bowiem mimo pozornie skomplikowanej postaci funkcji $\Gamma_{bcd}^a(m)$, ostateczny rezultat takich rachunków będzie trywialny: $K_{bcd}^a \equiv 0$.

6 Materia powodem zakrzywienia czasoprzestrzeni

W teorii grawitacji Einsteina pole grawitacyjne jest zatem polem lokalnych układów inercjalnych, które można opisać w ustalonym układzie współrzędnych jako pole zależnych od punktu czasoprzestrzeni współczynników powiązania $\Gamma_{bc}^a(m)$. Ale czym zastąpić równania pola, które w teorii Newtona wyglądały następująco:

$$\vec{G} = -\gamma \frac{\mu \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, \quad (29)$$

gdzie μ jest masą ciała będącego źródłem pola (np. słońca w układzie planetarnym), \vec{x} – wektorem wiodącym ciała próbnego względem źródła, zaś γ – stałą grawitacyjną. Gdy źródłem pola nie jest masa punktowa ale ciągły rozkład mas, opisany gęstością ρ , to pole \vec{G} jest superpozycją wkładów od poszczególnych punktów. Łatwo widać, że odpowiada to następującym dwóm warunkom, które spełnia to pole:

1. Pole \vec{G} jest bezwirowe: $\text{rot } \vec{G} = 0$.
2. Spełnione jest równanie wiążące rozbieżność pola ze źródłami, mianowicie $\text{div } \vec{G} = 4\pi\gamma\rho$.

Okazuje się, że w teorii Einsteina powyższe warunki należy zastąpić następującymi:

1. Warunek zgodności z resztą fizyki, opisaną przez strukturę metryczną czasoprzestrzeni. Bowiem inne działy fizyki – np. elektrodynamika – wykorzystują pole tensora metrycznego g_{kl} , opisujące „odległości” czterowymiarowe między różnymi zdarzeniami przestrzennymi. Strukturą tego tensora zajmuje się tzw. szczególna teoria względności. Zgodność obu struktur polega na tym, że tensor metryczny ma być w jakimś sensie „stały” w czasoprzestrzeni. Cóż to jednak ma znaczyć, skoro przechodząc od jednego układu współrzędnych do innego można współrzędne g_{kl} znacznie zmienić i np. ze stałych uczynić zmienne? Otóż warunek ten oznacza, że pochodne tensora metrycznego mają zerować się *w układzie inercyjnym*. Mówi się, że metryka jest *kowariantnie stała* na M . Warunek ten zastępuje jednorodny warunek $\vec{G} = 0$ z teorii newtonowskiej.
2. Natomiast warunek niejednorodny zastąpiony jest *równaniem Einsteina*, wiążącym krzywiznę ze źródłami pola:

$$G_{kl} = 8\pi\gamma T_{kl} .$$

W równaniu tym

$$G_{kl} := R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R ,$$

oznacza tzw. tensor Einsteina, $R_{kl} := \frac{3}{2}K_{kln}^n$ jest tzw. tensorem Ricci’ego, powstałym z tensora krzywizny przez zwięzienie po pierwszym i ostatnim wskaźniku zaś $R = g^{kl}R_{kl}$ jest śladem tensora Ricci’ego, zwanym *skalarem krzywizny*. W każdym razie po lewej stronie stoi (na miejscu dywergencji pola \vec{G} z teorii Newtona) jakaś informacja o krzywiznie, wyrażona pochodnymi pola Γ . Natomiast po prawej stronie stoi tensor energii-pędu materii T , niosący informację o źródłach pola grawitacyjnego.

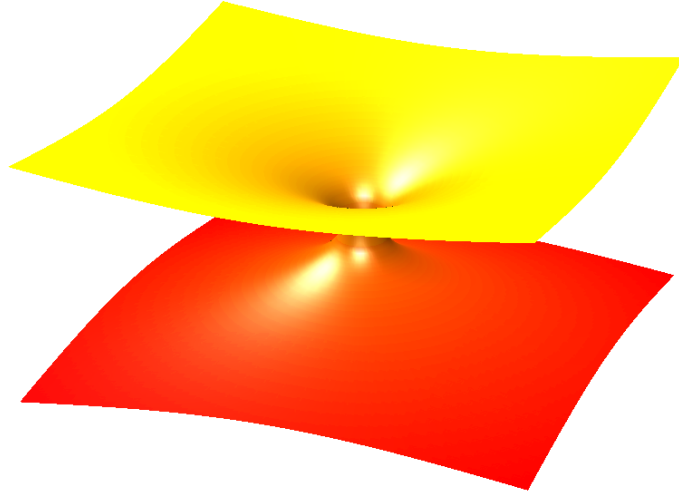
Jeśli czasoprzestrzeń nie jest pusta – to znaczy gdy stojący po prawej stronie równań Einsteina tensor energii-pędu materii nie jest równy zeru – wtedy również lewa strona nie może zniknąć, zatem czasoprzestrzeń nie może być płaska. Można skrótowo powiedzieć, że obecność materii, której konfiguracja jest mierzona wielkością tensora energii-pędu T , „wykrzywia” czasoprzestrzeń.

Nie jest natomiast prawdą, że przestrzeń pusta musi być płaska: z równań Einsteina wynika jedynie znikanie tensora Einsteina G lub – co jest zupełnie równoważne – tensora Ricci’ego R . Ale jest to jedynie część informacji zawartych w pełnym tensorze krzywizny K . Dziś wiemy już, że wcale nie musi to pociągać znikania całego tensora krzywizny. Istnieją bowiem rozwiązania równań Einsteina opisujące przestrzeń pustą ale mimo to krzywą. Jej krzywizna propaguje się w sposób nieco zbliżony (choć dużo trudniejszy, ze względu na nieliniowość równań Einsteina) do propagacji fal elektromagnetycznych i opisuje zjawiska, które nazywamy *falami grawitacyjnymi*. Ta wiedza nie była oczywista od początku badań teorii. Sam Einstein miał poważne wątpliwości na ten temat i dość długo sądził, że „fal grawitacyjnych nie ma”. W (teoretycznym) odkryciu tych fal wybitny udział miał wielki polski fizyk-teoretyk, prof. Andrzej Trautman, zresztą absolwent Politechniki Warszawskiej. Na powtórne – tym razem obserwacyjne – ich odkrycie czekamy do tej pory.

7 Krótka historia odkrywania „czarnych dziur”

Już kilka miesięcy po ogłoszeniu Ogólnej Teorii Względności – na przełomie 1915 i 1916 roku – wybitny niemiecki astronom, fizyk i matematyk, Karl Schwarzschild znalazł pierwsze ścisłe rozwiązanie równań Einsteina, opisujące sferycznie symetryczne pole grawitacyjne wokół ciężkiego ciała o danej masie. Rozwiązanie to jest relatywistycznym odpowiednikiem pola (29). Scenerię tego odkrycia znamy dobrze z książki Jaroslava Haška o dobrym wojaku Szwejku: okolice Przemyśla, błoto i śnieg, okopy pierwszej wojny światowej. Karl Schwarzschild został zmobilizowany na wojnę w charakterze oficera artylerii, jednak nawet w tak trudnych warunkach nie porzucił aktywności intelektualnej. Zresztą kilka miesięcy po swoim wspaniałym odkryciu, w maju 1916 roku, zmarł na skutek rzadko spotykanej choroby skórnej - pęcherzycy, której nabawił się na wojnie.

Podobnie jak pole (29) w punkcie $\vec{x} = 0$, rozwiązanie Schwarzschilda cechuje się osobliwością, gdy opisujące je formuły tracą sens, bowiem zawierają dzielenie przez zero. Jednak w przypadku pola Schwarzschilda ta osobliwość występuje wcześniej, zanim zbliżymy się do „centrum” punktowej masy, którą chcielibyśmy opisywać. W przypadku masy równej masie Ziemi ten krytyczny „promień Schwarzschilda” wynosi ok. centymetra, a dla masy Słońca – ok. 3 km. Można byłoby pocieszać się, że w przyrodzie nigdy taka osobliwość nie wystąpi, bo nie potrafimy przecież „sprasować” masy Ziemi



Rysunek 3: Cięcie $\{t = \text{const}\}$ czasoprzestrzeni Schwarzschilda.

do rozmiarów centymetra! Dziś wiemy jednak, że materia w tzw. gwiazdach neutronowych może być upakowana *dużo gęściej* niż to, z czym mamy do czynienia w potocznym doświadczeniu i, być może, istnieją sytuacje astrofizyczne, w których cała masa będąca źródłem geometrii Schwarzschilda jest ukryta wewnątrz tej „osobliwości”. A zatem problem pozostaje: co się dzieje w „osobliwości” rozwiązania Schwarzschilda: czy przestaje obowiązywać znana nam fizyka? Czy wewnątrz obszaru o silnej krzywiznie ziele jakaś otchłań, czy jest tam po prostu „czarna dziura”? Okazuje się, że sama osobliwość występująca we wzorach na rozwiązanie Schwarzschilda, która tak niepokoiła fizyków od początku Ogólnej Teorii Względności, jest pozorna i opisuje jedynie własności szczególnego układu współrzędnych, których użył jego twórca. Sytuacja jest podobna do tej, gdybyśmy punkty paraboloidy obrotowej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, danej równaniem:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z^2 ,$$

chcieli parametryzować przy pomocy dwu zmiennych (x, y) , traktując współrzędną z jako ich funkcję:

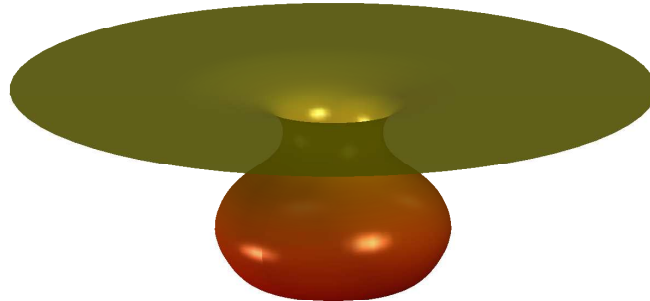
$$z = +\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} .$$

Widać, że na kole danym równaniem: $x^2 + y^2 = 1$, taki opis zawodzi, bowiem występuje „czarna dziura” odpowiadająca wartościom $x^2 + y^2 < 1$. A przecież nie ma tu żadnej osobliwości, należy jedynie do zbioru rozwiązań powyższego równania, opisującego górną połowę paraboloidy, dokleić jej dolną połowę, odpowiadającą znakowi „minus” przed pierwiastkiem. Bardzo łatwo znaleźć współrzędne, które zachowują się nieosobliwie w pobliżu „wąskiego gardła”, wzdłuż którego sklejono obie połowki tej powierzchni.

Takim właśnie „wąskim gardłem” trójwymiarowego cięcia $\{t = \text{const}\}$ jest pozorna osobliwość Schwarzschilda, zob. rys. 3. Z dala od niej to cięcie przypomina coraz bardziej naszą płaską, euklidesową przestrzeń trójwymiarową. Zbliżając się do wąskiego gardła przestrzeń staje się coraz bardziej zakrzywiona a po jego przekroczeniu znów zaczyna się wypłaszczać: być może aż do jakiegoś „drugiego końca” przestrzeni, jak na rysunku 3, ale – być może – aż do schowanej wewnątrz tego gardła materii, będącej źródłem pola grawitacyjnego, tak jak na rys. 4.

Tym niemniej obszar czasoprzestrzeni odpowiadający punktom leżącym wewnątrz tego „gardła” ma dość szczególne właściwości, bowiem nie może się zeń wydostać „na zewnątrz” żadna informacja. Co więcej, tam *naprawdę* jest osobliwość (ale nie przestrzenna, którą można byłoby pokazać na rys. 4, lecz *czasoprzestrzenna*), nie dająca się usunąć poprzez manipulacje współrzędnymi. Obecnie „czarną dziurą” nazywa się taką właśnie sytuację.

Teorii czarnych dziur nadał impet wielki astrofizyk hinduski Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 – 1995), uhonorowany za swe prace nagrodą Nobla w 1983 roku. W roku 1930 – wiążąc dwie bardzo młode teorie fizyczne: Ogólną Teorię Względności i Mechanikę Kwantową – zauważył on, że ewolucja gwiazd do stacjonarnego stanu Białego Karła, w którym ciśnienie gazu elektronowego wewnątrz gwiazdy powinno zrównoważyć siły grawitacyjne, będzie zachodziła zupełnie inaczej dla gwiazd cięższych niż pewna wartość krytyczna, znana dziś jako masa Chandrasekhara i wynosząca 1,44 masy Słońca. Otóż dla ciężkiej gwiazdy ciśnienie wewnętrzne nie zdoła zrównoważyć przyciągania grawitacyjnego i w końcu cała masa zapadnie się „pod horyzont” jak na rysunku 4. A więc uformuje się czarna dziura, a w każdym razie widziane z zewnątrz pole grawitacyjne będzie miało wiele cech sytuacji opisywanej przez geometrię Schwarzschilda. Wydaje się, że jest to sytuacja dość powszechna we Wszechświecie i powinniśmy na niebie widzieć wiele takich obiektów. Aby je odróżnić od zwykłych gwiazd czy galaktyk potrzebne są dokładniejsze obserwacje niż te, których można dokonywać przy pomocy tradycyjnych teleskopów. W tym celu buduje się obecnie obserwa-



Rysunek 4: Materia „schowana pod horyzontem”.

toria umieszczone w Kosmosie. Takie dwa orbitalne obserwatoria: Spitzer oraz Chandra, dostarczyły ogromnej ilości danych potwierdzających istnienie czarnych dziur. Astrofizycy mówią ostatnio o „setkach czarnych dziur, które zostały ostatnio odkryte w odległych galaktykach pyłowych” przez te urządzenia.

Bardzo istotna metoda testowania wyników tych obserwacji, pomagająca odróżnić czarną dziurę od „banalnej” gwiazdy lub galaktyki, polega na wykorzystaniu zjawiska soczewkowania grawitacyjnego. Wykorzystuje ona zjawisko uginania promieni świetlnych w polu grawitacyjnym. Jednym z animatorów i współautorów tej metody był niedawno zmarły, wybitny polski astrofizyk Bogdan Paczyński (1940, Wilno – 2007, Princeton).

Dzięki tym wszystkim obserwacjom i pomiarom astrofizycy coraz mocniej utwierdzają się w przekonaniu, że matematyczna konsekwencja teoretycznych idei Alberta Einsteina jaką jest struktura czarnej dziury, istnieje jako fakt rzeczywisty, realnie obserwowany w przyrodzie.

Literatura

- [1] W. Kopczyński, A. Trautman, *Czasoprzestrzeń i grawitacja*, PWN, Warszawa (1981).
- [2] C. W. Misner, K.S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, N. H. Freeman and Co, San Francisco, Cal. (1973).
- [3] R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984).