Astronomia

Wykład II

Wykład dla studentów geografii

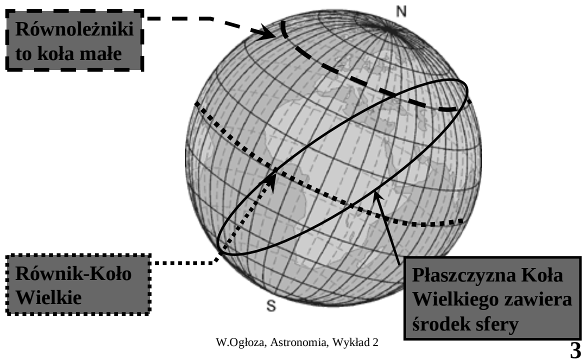
Waldemar Ogłoza

www.as.up.krakow.pl

> dla studentów > zajęcia W.Ogłozy>a4g-w2.pdf

Układy współrzędnych sferycznych

Koła Wielkie i Koła Małe

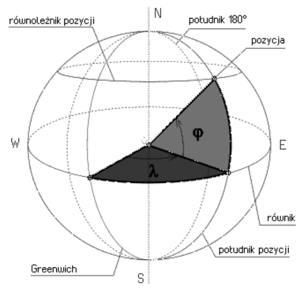


Współrzędne sferyczne

(np. geograficzne na powierzchni Ziemi)

Szerokość geograficzna φ: kąt pomiędzy kierunkiem pionu w danym miejscu a płaszczyzną równika ziemskiego

Długość geograficzna λ: kąt dwuścienny pomiędzy płaszczyzną południka zerowego a płaszczyzną południka przechodzącego przez dane miejsce.



Elementy układów współrzędnych

Współrzędne geograficzne

• Oś układu	• Oś obrotu Ziemi
• Płaszczyzna podstawowa	• Równik (prostopadły do osi obrotu)
• Pierwsza współrzędna	• Szerokość geograficzna φ
• jednostki; zakres; zwrot	• °; od -90 (S) do +90 (N)
• Druga współrzędna	• Długość geograficzna λ
• Półkole początkowe	• Południk zerowy
• jednostki; zakres; zwrot	• °; od -180 (W) do +180 (E)

Sfera niebieska

<u>Pion</u> - wyznaczony przez kierunek siły grawitacji

<u>Horyzont</u> - Koło Wielkie prostopadłe do pionu

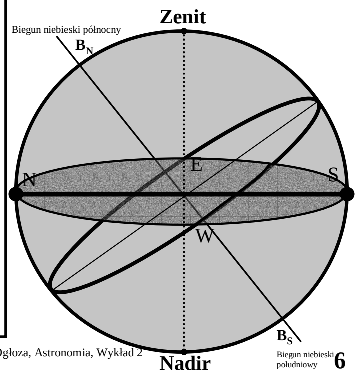
<u>Zenit i Nadir</u> - punkty przecięcia pionu ze sferą niebieską

<u>Oś świata</u> - prosta równoległa do osi obrotu Ziemi przechodząca przez obserwatora

<u>Bieguny Niebieskie</u> - przecięcie Osi Świata ze sferą

<u>Równik Niebieski</u> - Koło Wielkie prostopadłe do Osi Świata, równoległe do równika ziemskiego Przecina horyzont w punktach **<u>E, W</u>**

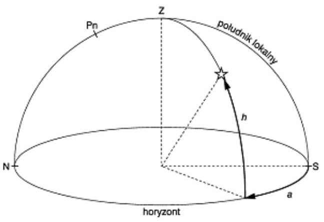
<u>Południk Niebieski</u> - Koło Wielkie przechodzące przez Bieguny, Zenit i Nadir. Jego przecięcie z horyzontem wyznacza punkty **<u>N, S</u>**



Współrzędne horyzontalne

Wysokość h:
kąt pomiędzy kierunkiem do danego obiektu na sferze niebieskiej a płaszczyzną horyzontu

Azymut a:
kąt dwuścienny pomiędzy półpłaszczyzną południka niebieskiego a półpłaszczyzną zwierająca pion i przechodzącą przez dane miejsce na sferze niebieskiej.



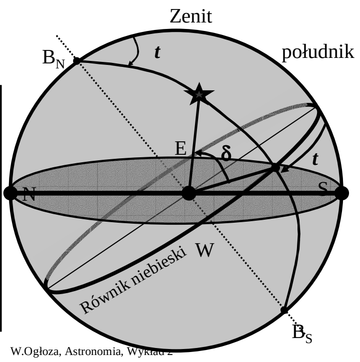
Elementy układów współrzędnych
Współrzędne horyzontalne

• Oś układu	• Pion
• Płaszczyzna podstawowa	• Horyzont matematyczny (prostopadły do pionu)
• Pierwsza współrzędna	• Wysokość h
• jednostki; zakres; zwrot	• °; od -90° do +90°
• Druga współrzędna	• Azymut ***a*** lub **Az**
• Półkole początkowe	• Kierunek S
• jednostki; zakres; zwrot	• °; 0° - 360°; S→W→N→E

Współrzędne równikowe-południkowe

Kąt godzinny *t* : kąt pomiędzy płaszczyzną południka niebieskiego a płaszczyzną wyznaczoną przez Oś Świata i obiekt na niebie

Deklinacja δ : kąt pomiędzy kierunkiem do obiektu a płaszczyzną równika niebieskiego



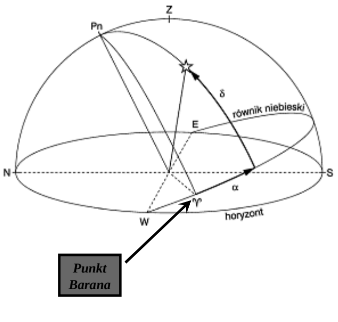
Elementy układów współrzędnych
Współrzędne równikowe-południkowe

• Oś układu	• Oś świata
• Płaszczyzna podstawowa	• Równik niebieski
• Pierwsza współrzędna	• deklinacja δ
• jednostki; zakres; zwrot	• °; od -90 (S) do +90 (N)
• Druga współrzędna	• kąt godzinny ***t***
• Półkole początkowe	• od południka
• jednostki; zakres; zwrot	• $^{h\ m\ s}$; 0 - 24; na zachód

Współrzędne równikowe-równonocne

Deklinacja δ:
kąt pomiędzy kierunkiem do danego obiektu na sferze niebieskiej a płaszczyzną równika niebieskiego

Rektascensja α:
kąt dwuścienny pomiędzy półpłaszczyzną wyznaczoną przez Oś Świata i punkt równonocy wiosennej (Punkt Barana) a półpłaszczyzną zwierająca Oś Świata i przechodzącą przez dane miejsce na sferze niebieskiej.



Elementy układów współrzędnych
Współrzędne równikowe-równonocne

• Oś układu	• Oś świata
• Płaszczyzna podstawowa	• Równik niebieski
• Pierwsza współrzędna	• deklinacja δ
• jednostki; zakres; zwrot	• °; od -90 (S) do +90 (N)
• Druga współrzędna	• rektascensja α
• Półkole początkowe	• od punktu równonocy wiosennej*
• jednostki; zakres; zwrot	• $^{h\ m\ s}$; 0 - 24; na wschód

* tzw. punkt Barana

Czas gwiazdowy T^*

- Obie współrzędne gwiazd w układzie horyzontalnym cały czas się zmieniają z niejednorodną prędkością
- Obie współrzędne gwiazd w układzie równikowym-równonocnym są stałe
- W układzie równikowym-południkowym deklinacja jest stała a kąt godzinny rośnie jednostajnie w czasie
- Wzajemną orientację obu układów równikowych określa tzw czas gwiazdowy

Czas gwiazdowy T^* jest równy rektascensji obiektów górujących lub kątowi godzinnemu punktu Barana[1]

[1] Punkt Barana, pozycja Słońca w czasie równonocy wiosennej, przecięcie ekliptyki z równikiem niebieskim

Współrzędne równikowe-południkowe

Kąt godzinny punktu Barana t_{γ}
Czas gwiazdowy T^*

$$t_{\gamma} = T^*$$

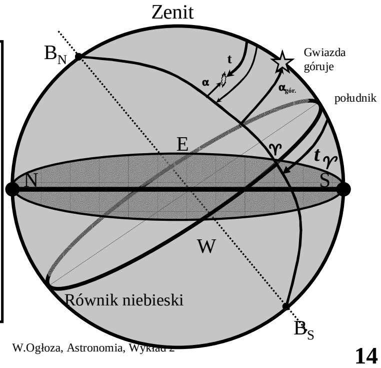
t_{γ} rośnie jednostajnie wraz z upływem czasu gwiazdowego T^*. (dlatego wygodnie jest używać miary czasowej kątów!)

Rektascensja gwiazd górujących $\alpha_{gór}$ jest równa T^*

$$\alpha_{gór} = T^*$$

Dla innych obiektów:

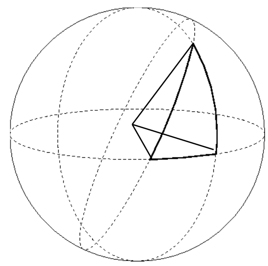
$$t = T^* - \alpha$$



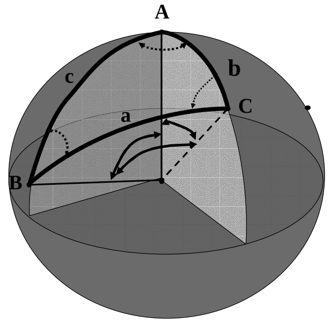
Trójkąty sferyczne i paralaktyczne

Trójkąt sferyczny

- Trójkąt leżący na powierzchni kuli
- Boki są fragmentami kół wielkich
- Boki opisujemy jako kąty z wierzchołkami w środku sfery



Trójkąt sferyczny



Kąty wierzchołkowe oznaczamy A,B,C a ich przeciwległe boki a,b,c

Boki trójkąta sferycznego są również kątami! (wierzchołek w środku sfery)

<u>Suma A+B+C jest większa od 180 stopni i mniejsza od 540 stopni!</u>

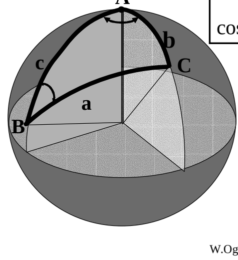
Podobnie jak w trójkątach płaskich aby rozwiązać trójkąt potrzeba znać trzy elementy oraz odpowiednie wzory:

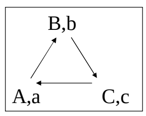
Trójkąt sferyczny

$$\sin a / \sin A = \sin b / \sin B = \sin c / \sin C$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

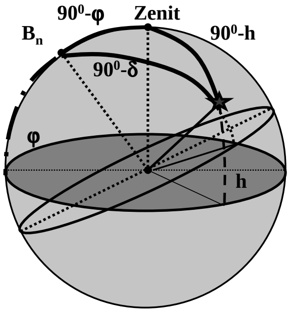
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$





Reguła zmiany oznaczeń

Trójkąt paralaktyczny

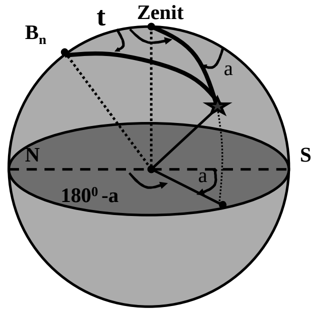


Trójkąt na sferze niebieskiej o ustalonych wierzchołkach: Zenit, Biegun, Obiekt
Łączy współrzędne horyzontalne z równikowo-południkowymi

Wierzchołki:
- •Zenit
- •Biegun Niebieski
- •gwiazda

Przeciwległe boki
- •90^0-δ (δ deklinacja · · · ·)
- •90^0-h (h wysokość - - -)
- •90^0-φ (φ szer. geogr. - · -)

Trójkąt paralaktyczny



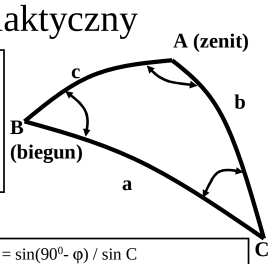
Wierzchołki:
- •Zenit
- •Biegun Niebieski
- •gwiazda

Kąty wierzchołkowe:
- •180^0 - a (Az Azymut)
- •kąt godzinny ***t***
- •kąt paralaktyczny

Trójkąt paralaktyczny

kąty:	przeciwległe boki:
A = 180^0-a	**a = 90^0-δ**
B = *t*	**b = 90^0-h**
C*	**c = 90^0-φ**

* Tak zwany kąt przy gwieździe na ogół nie potrzebny do obliczeń



$\sin(90^0-\delta) / \sin(180^0-a) = \sin(90^0-h) / \sin t = \sin(90^0-\varphi) / \sin C$

$\sin(90^0-\delta)\cos t = \cos(90^0-h)\sin(90^0-\varphi) - \sin(90^0-h)\cos(90^0-\varphi)\cos(180^0-a)$

$\cos(90^0-\delta) = \cos(90^0-h)\cos(90^0-\varphi) + \sin(90^0-h)\sin(90^0-\varphi)\cos(180^0-a)$

$\cos(90^0-h) = \cos(90^0-\varphi)\cos(90^0-\delta) + \sin(90^0-\varphi)\sin(90^0-\delta)\cos(t)$

Zastosowania trójkątów sferycznych do nawigacji:

Ortodroma i Loksodroma

czyli szybka lub łatwa podróż po powierzchni sfery

Ortodroma - „prostobieżnia”

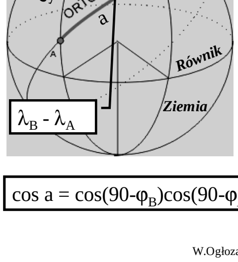
- jest najkrótszą drogą pomiędzy dwoma punktami na powierzchni sfery (np.: dwa miasta na kuli ziemskiej)
- Do obliczenia jej długości stosuje się **trójkąt sferyczny** na powierzchni Ziemi z wierzchołkami: Biegun ziemski, punkt 1, punkt 2
- jest fragmentem koła wielkiego
- przecina kolejne południki pod różnymi kątami (podróżnik musi ciągle zmieniać kurs)

Loksodroma - „skośnobieżnia”

- przecina wszystkie południki pod tym samym kątem, zatem podróżnik może utrzymywać stały kurs aby dotrzeć do celu
- jest dłuższa od ortodromy

Ortodroma - najkrótsza droga

(łuk koła wielkiego)



Kąt przy biegunie jest równy różnicy długości geograficznych obu miejsc ($\lambda_B - \lambda_A$)
Długości geograficzne zachodnie podstawiamy ze znakiem minus!

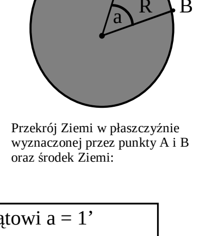
Boki przy biegunie są związane z szerokością geograficzną punktów A i B (**90-φ_A**) i (**90-φ_B**)

Z wzoru kosinusowego można obliczyć cos(a) a następnie bok ***a***

$\cos a = \cos(90-\varphi_B)\cos(90-\varphi_A) + \sin(90-\varphi_B)\sin(90-\varphi_A)\cos(\lambda_B-\lambda_A)$

Ortodroma

a = arccos (cos (a))*
Z proporcji: a/360° = x / 2πR
gdzie:
X to odległość punktów A i B
R promień Ziemi



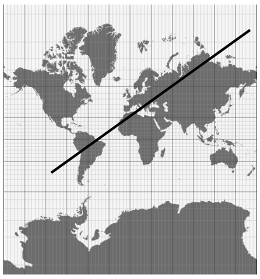
Przekrój Ziemi w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty A i B oraz środek Ziemi:

1 mila morska = 1852 metry odpowiada kątowi a = 1’
1° koła wielkiego odpowiada odległości ~111.2 kilometrów

* Funkcja: cos (60^o) = 0.5 ; funkcja do niej przeciwna: arc cos (0.5) = 60^o

Loksodroma

przecina południki pod stałym kątem
na mapie Merkatora jest linią prostą



Wyznaczanie kursu loksodromy

- Dla punktów o współrzędnych (λ_1,φ_1) i (λ_2 ,φ_2) obliczamy wielkości pomocnicze:

$$\Phi_1 = \ln (\mathrm{tg}\ (45^0 - \varphi_1/2) \quad \text{i} \quad \Phi_2 = \ln (\mathrm{tg}\ (45^0 - \varphi_2/2)$$

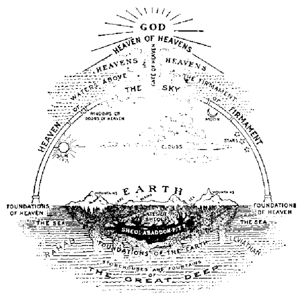
- Kurs α (kąt pomiędzy kierunkiem ***N*** a kierunkiem ruchu mierzony zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara) obliczymy ze związku :

$$\boxed{\mathrm{tg}\ \alpha = (\lambda_1 - \lambda_2) / (\Phi_1 - \Phi_2)}$$

- W praktyce nawigacja odbywa się po linii łamanej zbliżonej do ortodromy a poszczególne odcinki są fragmentami różnych loksodrom

Kształt i rozmiary Ziemi

Najdawniejsze wyobrażenia



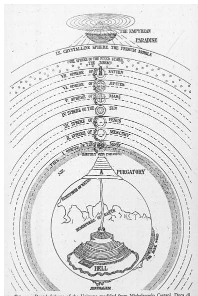
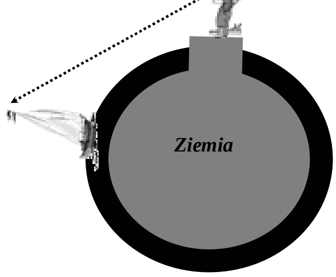


FIG. 39.—Dante's Scheme of the Universe modified from Michelangelo Caetani, Duca di Sermoneta, *La materia della Divina Commedia di Dante Alighieri*, Monte Cassino, 1855.

Kulistość globu ziemskiego

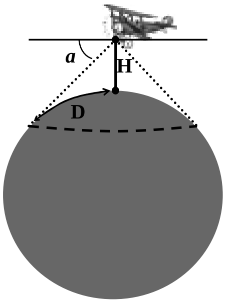
- wyłanianie się masztów statków zza horyzontu
- zmiana wysokości Bieguna Niebieskiego przy zmianie szerokości geograficznej obserwatora
- okrągły kształt cienia Ziemi widoczny podczas zaćmienia Księżyca
- doświadczenie Eratostenesa
(obserwacja wysokości górowania Słońca na różnych szerokościach geograficznych)

Obiekty na horyzoncie



Obniżenie horyzontu

- Horyzont dla obserwatora znajdującego się na pewnej wysokości H nad powierzchnią Ziemi obniża się o pewien kąt ***a,*** można obliczyć wartość obniżenia:

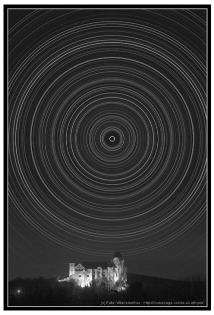


$\boldsymbol{a}$ [’]=1.779 (H [m])$^{1/2}$

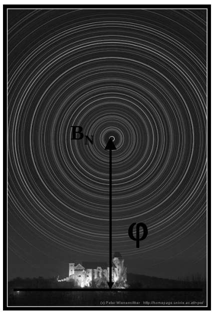
- Zasięg widoczności:

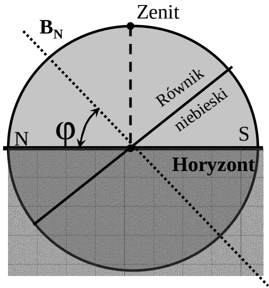
D [km] = 3.86 (H [m])$^{1/2}$

Położenie Bieguna Niebieskiego



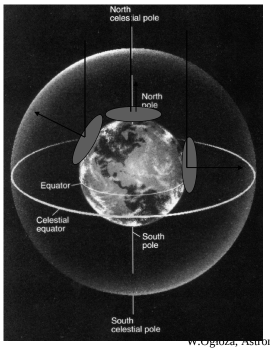
Zmiana wysokości Bieguna





Przekrój sfery niebieskiej w płaszczyźnie południka niebieskiego

Położenie Bieguna Niebieskiego



Wysokość bieguna niebieskiego jest równa szerokości geograficznej miejsca obserwacji

Na biegunie ziemskim biegun niebieski znajduje się w zenicie

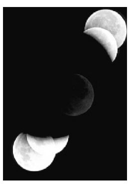
Na Równiku widać oba bieguny niebieskie leżące na horyzoncie

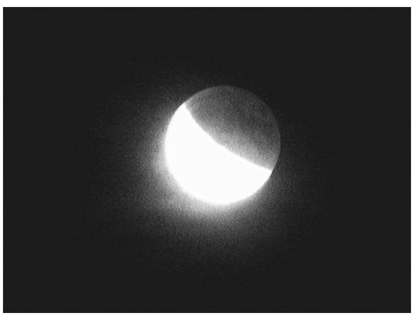
kierunek na Zenit

kierunek na Biegun

Płaszczyzna horyzontu

Zarys cienia Ziemi na Księżycu

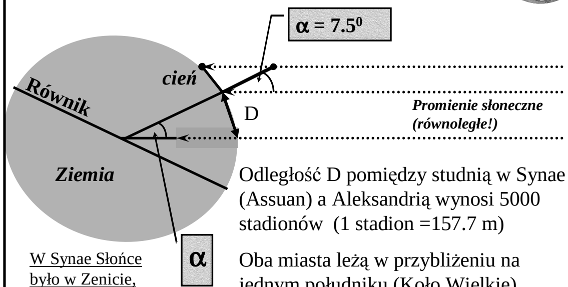




W czasie zaćmienia Księżyca cień Ziemi pada na Księżyc

Cień Ziemi ma większą średnicę niż Księżyc lecz brzeg cienia jest zaokrąglony

Doświadczenie Eratostenesa - pomiar rozmiarów Ziemi



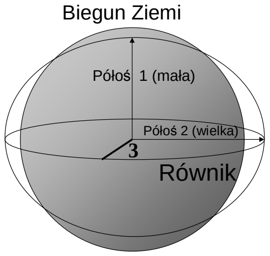
Odległość D pomiędzy studnią w Synae (Assuan) a Aleksandrią wynosi 5000 stadionów (1 stadion =157.7 m)

Oba miasta leżą w przybliżeniu na jednym południku (Koło Wielkie)

W Synae Słońce było w Zenicie, a w Aleksandrii nie!

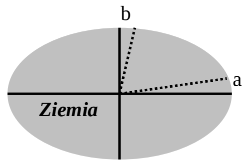
Dokładniejsze przybliżenia kształtu Ziemi

1. Kula (stały promień)
2. Elipsoida obrotowa
   Równik jest kołem
   (różne półosie 1 i 2)
3. Elipsoida trójosiowa
   Równik jest elipsą
   (różne półosie 2 i 3)
4. Geoida



Elipsoida obrotowa

- Skonstruowana na podstawie pomiarów długości 1^0 fragmentów południków ziemskich na różnych szerokościach geograficznych
- Spłaszczenie Ziemi powoduje, przy aby zmienić szerokość geograficzną o 1 stopień przy równiku trzeba przebyć inną drogę niż przy biegunie (a > b)



Elipsoida obrotowa WGS-84

- Promień równikowy Ziemi a
- Promień biegunowy Ziemi b
- Spłaszczenie s = (a-b)/a
- Obecnie stosuje się elipsoidę o rozmiarach:

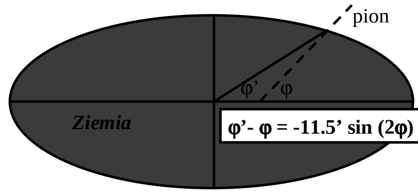
a = 6378137.0 m
b = 6356087.0 m
s = 1/298.25722356

Współrzędne geograficzne i geocentryczne

Szerokość geocentryczna φ’: kąt pomiędzy płaszczyzną równika ziemskiego a prostą przechodzącą przez środek Ziemi i dane miejsce na jej powierzchni

Szerokość geograficzna φ: kąt pomiędzy płaszczyzną równika ziemskiego a kierunkiem pionu w danym miejscu

Szerokość geodezyjna φ”: kąt pomiędzy płaszczyzną równika ziemskiego a kierunkiem prostopadłym do elipsoidy obrotowej w danym miejscu



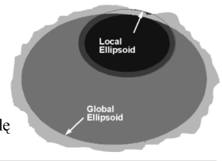
$\varphi' - \varphi = -11.5' \sin(2\varphi)$ [’]

Elipsoida trójosiowa

- Promień biegunowy Ziemi jest o ok. 21 km krótszy od równikowego
- Równik ziemski nie jest kołem lecz elipsą, której wielka oś jest dłuższa o 200m od krótszej i oś skierowanej w kierunku południków: -15^0 i 165^0
- Południowy promień biegunowy jest o 30 m dłuższy od północnego

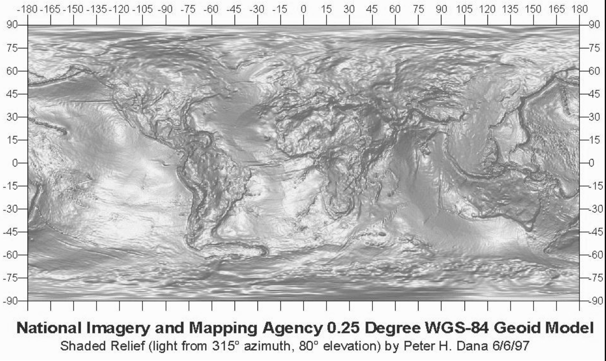
Geoida

Jest to powierzchnia prostopadła do kierunku pionu w każdym punkcie

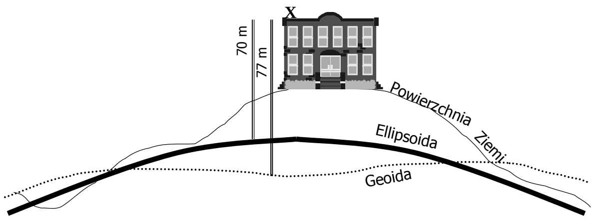


- Może być wyznaczana lokalnie lub globalnie
- Obecnie najczęściej stosuje się globalną geoidę WGS-84 (World Geodetic System)

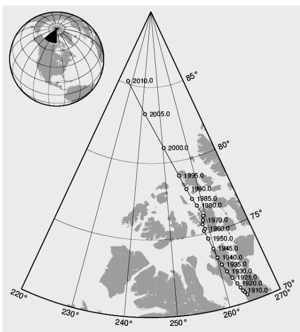
Ellipsoid	Date	Equatorial radius	Polar radius	Polar flattening	Where its used
Airy	1830	3962.65	3949.32	1/299.32	Great Britian
Australian	1969	3962.93	3949.64	1/298.25	Australia, South America
Bessel	1841	3962.46	3949.21	1/299.15	China, Korea, Japan
Clarke	1866	3962.96	3949.53	1/294.98	North America, Central America, Greenland
Clarke	1880	3962.99	3949.48	1/293.46	Much of Africa
Everest	1830	3962.38	3949.21	1/300.80	India, Southeast Asia, Indonesia
GRS	1980	3962.94	3949.65	1/298.25	Newly adopted for North America
International	1924	3962.07	3949.73	1/297.00	Europe, Indivisual states in South America
Krassovsky	1940	3962.98	3949.7	1/298.30	Russia
WGS	1972	3962.92	3949.62	1/298.26	NASA, US DOD, oil companies, Russia

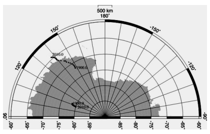


Wysokość n.p.m. zależy od układu odniesienia



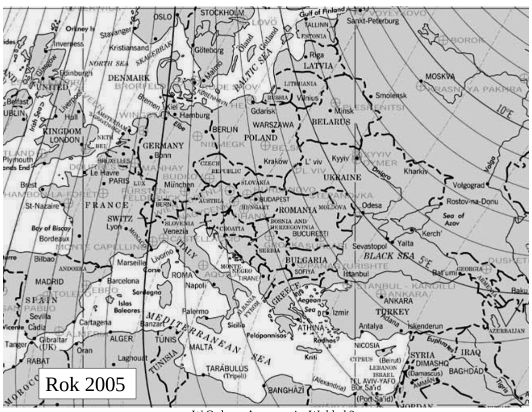
Biegun magnetyczny

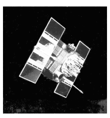




Deklinacja magnetyczna

- Deklinacja magnetyczna to kąt pomiędzy rzeczywistym kierunkiem N na wskazaniami kompasu magnetycznego
- Deklinacja jest zmienna w czasie. Jej wartość oraz tempo zmian podają mapy nawigacyjne na dany rok
- Deklinację magnetyczną liczy się od rzeczywistego (geograficznego) południka na wschód i zachód, od 0 do 180°. Wartość deklinacji jest dodatnia lub ujemna.
- Dodatnia (E) jest wtedy gdy południk magnetyczny jest odchylony od południka rzeczywistego w prawo, na wschód.
- Ujemna (W) wartość deklinacji jest wtedy gdy południk magnetyczny jest odchylony od południka rzeczywistego w lewo, na zachód.

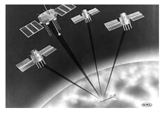




Nawigacja satelitarna

- **System GPS**
  (satelity na wysokości 20200km, na 6 orbitach nachylonych pod kątem 55°)
- **System GALILEO**
- **Stacje naziemne kontroli orbit**
  (np: Borówiec pod Poznaniem)

Każdy satelita nadaje sygnał czasu i parametry swojej orbity.
Odbiornik oblicza współrzędne satelity x,y,z oraz poprawkę zegara
Potrzeba sygnału co najmniej 4 satelitów aby obliczyć pozycję z równań opisujących odległość satelity od obserwatora w układzie prostokątnym:



$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = c^2\,(t-t_o)^2$$

Masa Ziemi

Eksperyment Cavendisha

Można porównać ciężar ciała i siłę grawitacji:

$$\boxed{\cancel{m}g = G \frac{M \cancel{m}}{R^2}}$$

gdzie: M - oznacza niewiadomą masę obiektu (np.:Ziemi).
g – przyspieszenie grawitacyjne (na Ziemi $g=9.81 m/s^2$)
R – promień ciała niebieskiego ($R_{Ziemi} = 6371 km$)
są znane więc można obliczyć masę Ziemi M:

$\boxed{\mathbf{M = g R^2 / G}}$ gdybyśmy tylko znali stałą G

Podobne zależności można stosować do innych obiektów astronomicznych!

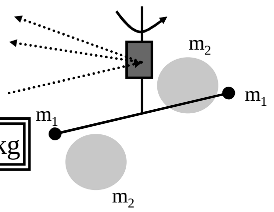
Eksperyment Cavendisha

Zastosowano wagę skręceń dla wyznaczenia G

$\boxed{G = 6.67259 \cdot 10^{-11}}$
$[m^3 kg^{-1} s^{-2}]$
z czego wynika

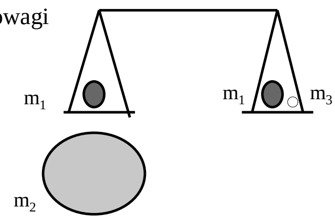
$\boxed{M_{Ziemi} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$

gęstość Ziemi 5520 kg/m^3



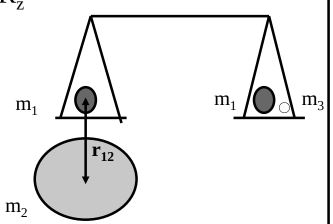
Eksperyment Jolly'ego

- •Zrównoważono czułą wagę
- •Podtoczono masę m_2 co wytrąciło wagę z równowagi
- •Dodano masę m_3 dla ponownego zrównoważenia szalek



Eksperyment Jolly'ego

$$\frac{G m_1 m_2}{r_{12}^{\;2}} = \frac{G M_z m_3}{R_z^{\;2}}$$



Ruch obrotowy Ziemi

Efekty ruchu wirowego Ziemi

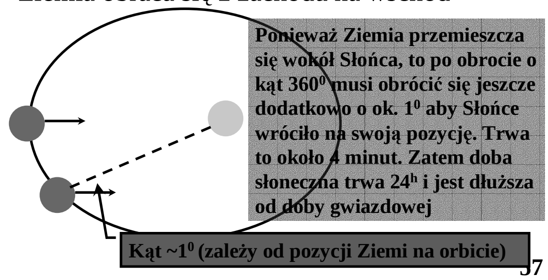
- Zjawisko dnia i nocy
- Spłaszczenie Ziemi przez siłę odśrodkową bezwładności
- Zależność ciężaru od szerokości geograficznej
- Siła Coriolisa
- Zmiana płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta

Zmierzchy i świty

Zjawisko:	Wysokość Słońca :
•Zachód, wschód	• $h = 0^0$ (bez refrakcji) • h = - 51' (z refrakcją i uwzględnieniem promienia tarcze słonecznej)
•Zmierzch cywilny	• $0^0 > h \geq -6^0$ Jest jasno
•Zmierzch nautyczny	• $-6^0 > h \geq -12^0$ Nie można czytać bez światła
•Zmierzch astronomiczny	• $-12^0 > h \geq -18^0$ Widać jasne gwiazdy
•Noc astronomiczna	• $-18^0 > h$ Nie widać żadnej części oświetlonej atmosfery ziemskiej

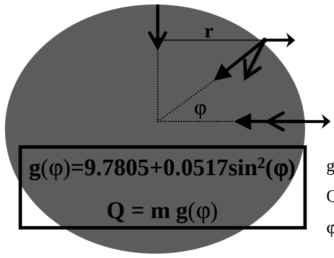
Obrót Ziemi

- Okres obrotu Ziemi trwa 23h 56m 04.09s
- Ziemia obraca się z zachodu na wschód



Siła odśrodkowa bezwładności

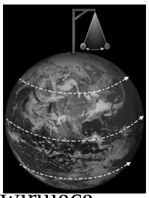
$\vec{F}_{odś} = mv^2/r$ $\quad \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} = \mathbf{mg_{graw}}$ $\quad \vec{Q} = \vec{F}_g - \vec{F}_{odś}$



$$\mathbf{g(\varphi) = 9.7805 + 0.0517\sin^2(\varphi)}$$
$$\mathbf{Q = m\, g(\varphi)}$$

g – przyspieszenie
Q – ciężar
φ - szer. geog.

Wahadło Foucaulta



- Na biegunie płaszczyzna wahań jest stała w przestrzeni (zasada zachowania momentu pędu)
- Dla obserwatora związanego z wirującą Ziemią płaszczyzna wahań będzie się pozornie skręcać a okres jej obrotu będzie równy okresowi obrotu Ziemi

Wahadło Foucaulta

- Poza biegunem płaszczyzna wahań nie może być stała gdyż porusza się punkt zamocowania wahadła
- Zaobserwowano, że poza biegunem okres obrotu płaszczyzny wahań będzie zależał od szerokości geograficznej φ:

$$\boxed{P = T / \sin(\varphi) = (\,23h\,56m\,04.09s\,) / \sin(\varphi)}$$