



1-sza Międzynarodowa Olimpiada z Astronomii i Astrofizyki

Chiang Mai, Tajlandia

Zawody teoretyczne

Środa, 5 grudnia 2007

Przeczytaj uważnie:

1. Zawody teoretyczne trwają 5 godzin. Zawody obejmują 4 zadania.
2. Używaj jedynie dostarczonego ołówka lub długopisu.
3. Pisz tylko na pierwszej stronie **arkuszy roboczych**. Pisz jedynie wewnątrz zaznaczonej ramki.
4. Zaczynaj każde zadanie na osobnym arkuszu.
5. Do każdego zadania, oprócz **czystych arkuszy roboczych**, otrzymasz **arkusze odpowiedzi**, gdzie musisz podsumować otrzymane wyniki. Wyniki liczbowe powinny być odnotowane z właściwą dokładnością.
6. Na **arkuszu roboczym** zestaw wszystkie niezbędne obliczenia potrzebne do rozwiązania zadania. Ogranicz opis do niezbędnego minimum; przedstaw rozwiązanie przede wszystkim w równaniach, liczbach, rysunkach i wykresach.
7. Wypełnij znajdujące się na górze arkuszy pola z **kodem Twojego kraju, Twoim kodem**, numerem zadania. Dla każdego zadania wpisz kolejny numer strony arkusza roboczego i całkowitą liczbę użytych stron **arkuszy roboczych**. Na górze każdej strony wpisz numer zadania, na które odpowiadasz. Jeżeli użyłeś niektórych **arkuszy roboczych** dla własnych notatek i nie chcesz sobie aby nie były one ocenione, przekreśl odpowiedni arkusz dużym znakiem X i nie włączaj go do liczby arkuszy numerowanych.
8. Zadania otrzymujesz w języku angielskim i polskim. Na pytania możesz odpowiadać na dowolnym, jednym z dwóch, arkuszy, ale musisz oddać obie wersje językowe egzaminatorowi.
9. Po zakończeniu, ułóż wszystkie arkusze dotyczące danego zadania *w następującej kolejności*:
 - Arkusz (arkusze) odpowiedzi
 - Arkusze robocze według kolejności
 - Arkusze z własnymi notatkami, które nie chcesz sobie aby były oceniane
 - Nieużywane arkusze oraz drukowane zadanie

Włóż wszystkie arkusze do koperty i pozostaw je na swoim stole. Nie wolno Ci wynieść *żadnego* arkusza z pomieszczenia zawodów.

Stałe uniwersalne i prawa fizyczne:

Stała grawitacji	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
Prawo Stefana-Boltzmanna	$W = \sigma T^4$ $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ J.s}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{K}^{-4}$
Prawo przesunięć Wiena	$\lambda_m T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$
Prędkość światła w próżni	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Użyteczne dane:

1 rok zwrotnikowy	= 365.242 dni słonecznych
1 doba gwiazdowa	= 23 godzin 56 minut 4.1 sekund
1 jednostka astronomiczna (A.U.)	= $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
1 parsek (pc)	= $3.0856 \times 10^{16} \text{ m} = 3.262 \text{ ly}$
1 Mpc	= 10^6 pc
1 rok świetlny (ly)	= $9.46 \times 10^{15} \text{ m}$

Dane Układu Słonecznego:

Słońce	promień $R_{\odot}$	= $6.960 \times 10^8 \text{ m}$
	masa $M_{\odot}$	= $1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$
	moc promieniowania $L_{\odot}$	= $3.826 \times 10^{26} \text{ W}$
Ziemia	promień równikowy $R_{\oplus}$	= $6.378 \times 10^6 \text{ m}$
	masa $M_{\oplus}$	= $5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$
	promień orbity	= 1 A.U.
	okres obiegu	= 1 lat
Księżyc	promień równikowy R_{ζ}	= $1.7374 \times 10^6 \text{ m}$
	masa M_{ζ}	= $7.3483 \times 10^{22} \text{ kg}$
	promień orbity	= $3.84400 \times 10^8 \text{ m}$
	okres obiegu (gwiazdowy)	= 27.32166 dni
	miesiąc synodyczny	= 29.53059 dni

Wzory

$$\frac{d}{dx}(y^n) = n(y^{n-1})\frac{d}{dx}y \quad \frac{d}{dx}(uvw) = vw\frac{d}{dx}u + uw\frac{d}{dx}v + uv\frac{d}{dx}w$$

ZADANIE 1: (15 krótkich pytań, po 2 punkty na pytanie; sumarycznie 30 punktów)

Wskaż metodę rozwiązywania każdego pytania wypisując kolejne etapy na arkuszach roboczych (wyraźnie zaznaczając numer pytania). Końcowe wyniki wypisz na dostarczonych arkuszach odpowiedzi. Odpowiedzi bez wykazanej metody otrzymają jedynie część punktów.

- 1.1 Obserwatora znajduje się w punkcie o szerokości geograficznej 42.5° N i długości geograficznej 71° W. Oszacuj dla tego punktu moment wschodu Słońca w dniu 21 grudnia, zakładając, że czas urzędowy w miejscu obserwacji wynosi GMT -5 godzin. Pomiń rozmiary tarczy słonecznej i wpływ refrakcji.
- 1.2 Dla obserwatora na Ziemi, największa odległość kątowa pomiędzy Wenus a Słońcem wynosi 46° . Oblicz promień orbity kołowej Wenus w jednostkach astronomicznych (A.U.).
- 1.3 Pomiędzy południem 1 lipca a południem 31 grudnia upływa 183 dób słonecznych. Ile upływa dób gwiazdowych?
- 1.4 W pewną noc podczas pełni Księżyca, rozmiar kątowy tarczy Księżyca wynosi 0.46 stopnia. Jaka jest odległość od obserwatora do Księżyca tej nocy?
- 1.5 Obserwator stwierdził różnicę (wynikającą z ruchu Ziemi wokół Słońca) w kierunkach do pewnej gwiazdy odległej o 100 parseków. Jaka była minimalna odległość kątowa (wyrażona w sekundach łuku) jaką obserwator mógł zmierzyć?
- 1.6 Kometą obiegającą Słońca osiąga maksymalną odległość 31,5 A.U, zaś minimalną odległość 0,5 A.U. Podaj okres orbitalny komety.
- 1.7 Dla komety z pytania 1.6, oblicz pole zakreślone przez linię łączącą kometę ze Słońcem (pole wyraż w A.U. do kwadratu / rok).
- 1.8 W jakiej długości fali najsilniej promieniuje gwiazda o temperaturze powierzchni 4000 K?

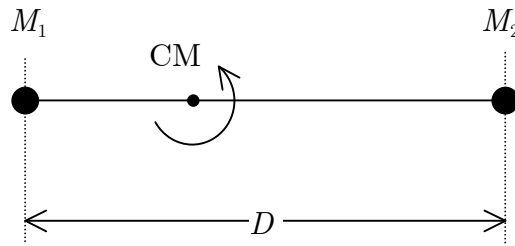
- 1.9 Oblicz całkowitą moc promieniowania gwiazdy o temperaturze powierzchni 7500 K i promieniu 2.5 razy większym niż promień Słońca. Podaj wynik w jednostkach mocy promieniowania Słońca, zakładając, że temperatura powierzchni Słońca wynosi 5800 K.
- 1.10 Moc promieniowania gwiazdy typu K leżącej na ciągu głównym, wyrażona w jednostkach mocy promieniowania Słońca, wynosi $0.4 L_{\odot}$. Obserwowane natężenie oświetlenia dochodzące od tej gwiazdy wynosi $6.23 \times 10^{-14} \text{ Wm}^{-2}$. Jaka jest odległość tej gwiazdy? Możesz pominąć efekty atmosferyczne.
- 1.11 Moc promieniowania supernowej jest 10^{10} razy większą, niż Słońca. Jeśli taka supernowa świeciłaby na niebie tak jasno jak Słońce, w jakiej byłaby odległości?
- 1.12 Zmiana spinu neutralnego atomu wodoru jest źródłem fali elektromagnetycznej o częstotliwości $\nu_0 = 1420.406 \text{ MHz}$. Tego typu emisję zaobserwowano z obłoku gazu leżącego blisko środka Galaktyki, przy czym zmierzona częstotliwość wynosiła $\nu = 1421.65 \text{ MHz}$. Oblicz prędkość obłoku gazu. Czy porusza się w kierunku do czy od Ziemi?
- 1.13 Krater na powierzchni Księżyca ma średnicę 80 km. Czy można dostrzec ten krater gołym okiem, jeśli średnica źrenicy oka wynosi 5 mm?
- 1.14 Gdyby nastąpiło grawitacyjne zapadnięcie się Słońca do postaci nierotującej czarnej dziury, jaki byłby promień jej horyzontu zdarzeń (jej promień Schwarzschilda)?
- 1.15 Jasność obserwowana najsłabszej gwiazdy widocznej gołym okiem wynosi $m = 6.0$, a najjaśniejszej gwiazdy na niebie $m = -1.5$. Jaki jest stosunek strumienia energii najsłabszej gwiazdy do najjaśniejszej?

ZADANIE 2 Planeta i jej temperatura powierzchni (10 punktów)

Szybko rotująca planeta ma promień R i albedo powierzchni α . Obiega ona gwiazdę o mocy promieniowania L . Promień orbity planety wynosi D . Zakładamy, że w stanie równowagi, cała dochodząca do planety energia jest absorbowana i ponownie emitowana tak, jak w ciele doskonale czarnym.

- a) Jaki będzie strumień promieniowania dochodzącego od gwiazdy do powierzchni planety
(1.5 punkta)
- b) Jaka część dochodzącej mocy promieniowania jest absorbowana przez planetę?
(1.5 punkta)
- c) Ile wynosi moc promieniowania planety wynikająca z odbicia światła gwiazdy?
(2 punkty)
- d) Ile wynosi średnia temperatura powierzchni planety wynikająca z własności ciała doskonale czarnego?
(2 punkty)
- e) Jeśli założymy, że tylko jedna strona planety jest zawsze zwrócona do gwiazdy, oblicz, jaka byłaby średnia temperatura powierzchni tej strony?
(2 punkty)
- f) Do obliczeń przyjmij następujące wartości:
 $\alpha = 0.25$
 $D = 1.523 \text{ A.U.}$
Oblicz w kelwinach temperaturę powierzchni planety, przyjmując moc promieniowania gwiazdy $L = 3.826 \times 10^{26} \text{ W}$.
(1 punkt)

ZADANIE 3 Układ podwójny (10 punktów)



Gwiazdy w układzie podwójnym mają masy M_1 i M_2 , a odległość pomiędzy nimi wynosi D .

Prędkość kątowna gwiazd w kołowym ruchu orbitalnym wokół wspólnego środka masy wynosi ω . Z jednej gwiazdy do drugiej w sposób ciągły następuje przepływ masy. To powoduje zarówno wolną zmianę okresu orbitalnego jak też zmianę odległości między gwiazdami.

W celu uproszczenia analizy, zakładamy, że gwiazdy są punktami materialnymi a efekty związane z ich własną rotacją pomijamy.

- a) Jaki jest moment pędu i energia kinetyczna układu? (2 punkty)
- b) Znajdź relację pomiędzy prędkością kątowną ω i odległością D pomiędzy gwiazdami. (2 punkty)
- c) W interwale czasu Δt , przepływ masy pomiędzy gwiazdami powoduje zmianę masy ΔM_1 gwiazdy M_1 . Znajdź wartość $\Delta\omega$ w zależności od ω , M_1 , M_2 , i ΔM_1 . (3 punkty)
- d) W danym układzie podwójnym $M_1 = 2.9 M_\odot$, $M_2 = 1.4 M_\odot$ a okres orbitalny $T = 2.49$ dni. Po upływie 100 lat, okres T wzrósł o 20 sekund. Znajdź wartość $\frac{\Delta M_1}{M_1 \Delta t}$ (w jednostkach: „rok⁻¹”). (1.5 punkta)
- e) W jakim kierunku następuje przepływ masy: z M_1 do M_2 , czy z M_2 do M_1 ? (0.5 punkta)
- f) Znajdź także wartość $\frac{\Delta D}{D \Delta t}$ (w jednostkach: „rok⁻¹”) (1 punkt)

W obliczeniach możesz użyć następujący przybliżeń:

$$(1+x)^n \sim 1+nx, \text{ przyjmując że } x \ll 1;$$

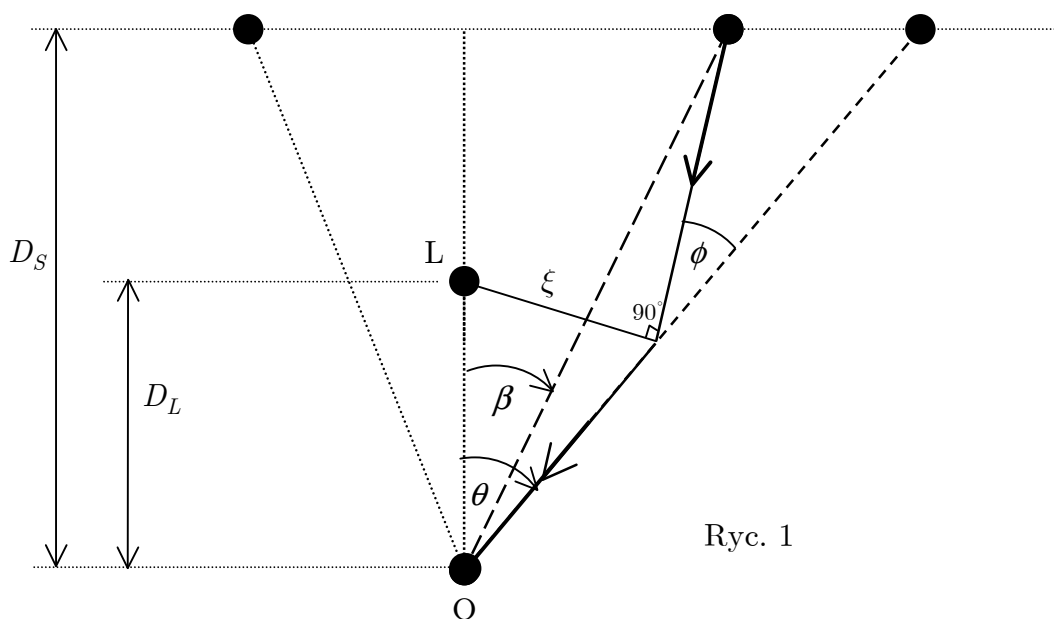
$$(1+x)(1+y) \sim 1+x+y, \text{ przyjmując że } x \ll 1, y \ll 1$$

ZADANIE 4 Soczewkowanie grawitacyjne (10 punktów)



Zakrzywienie promienia świetlnego przez pole grawitacyjne było przewidziane w 1912 roku przez Alberta Einsteina, kilka lat przed ogłoszeniem ogólnej teorii względności w 1916 r.

Masywny obiekt powodujący zakrzywienie promienia świetlnego ma własności podobne do klasycznej soczewki. Przewidywane zjawisko zostało potwierdzone przez Sir Arthura Stanleya Eddingtona w 1919 r.



Równanie opisujące zakrzywienie dla sferycznie symetrycznej soczewki o masie M i parametrze zderzeniowym ξ ma następującą formę:

$$\phi = \frac{4GM}{\xi c^2}$$

Jest to bardzo mały kąt.

Na ryc. 1, literą L oznaczono masywny obiekt, który zachowuje się jak soczewka. Promienie światła emitowane przez źródło S są zakrzywiane w pobliżu soczewki. Obserwator O dostrzeże źródło S w miejscach S_1 i S_2 . Kąty ϕ, β i θ są bardzo małe.

- a) Wykaż, że dla szczególnego przypadku, gdy źródło światła leży dokładnie na linii łączącej obserwatora i soczewkę, tak że $\beta = 0$, pierścieniowy obraz obiektu będzie miał promień kątowy θ_E , zwany promieniem Einsteina, wyrażony wzorem:

$$\theta_E = \sqrt{\left(\frac{4GM}{c^2}\right)\left(\frac{D_s - D_L}{D_L D_s}\right)} \quad (2 \text{ punkty})$$

- b) Przymij, że odległość gwiazdy będącej źródłem światła od Ziemi wynosi około 50 kpc, a soczewka o masie Słońca znajduje się w odległości 10 kpc od gwiazdy. Oblicz promień kątowy pierścienia Einsteina utworzony przez tę soczewkę, przy założeniu, że wszystkie obiekty znajdują się dokładnie na jednej linii. (1 punkt)
- c) Jaka jest zdolność rozdzielcza Teleskopu Kosmicznego Hubble'a, który ma zwierciadło o średnicy 2.4 m? Czy średnica zwierciadła Teleskopu Hubble'a jest wystarczająca aby dostrzec strukturę pierścienia Einsteina z punktu b)? (2 punkty)
- d) Jak wynika z ryc. 1, soczewka grawitacyjna utworzy dwa oddzielne obrazy (S_1 i S_2) izolowanego źródła punktowego S . Znajdź położenie (θ_1 i θ_2) dwóch obrazów. Odpowiedź wyraż w zależności od β i θ_E . (2 punkty)
- e) Znajdź stosunki $\frac{\theta_{1,2}}{\beta}$ (czyli $\frac{\theta_1}{\beta}$ albo $\frac{\theta_2}{\beta}$) w zależności od η . Tutaj $\theta_{1,2}$ oznaczają położenia

z punktu d), natomiast η oznacza stosunek $\frac{\beta}{\theta_E}$. (2 punkty)

- f) Znajdź również wartości powiększeń $\frac{\Delta\theta}{\Delta\beta}$ w zależności od η dla $\theta = \theta_{1,2}$ (czyli $\theta = \theta_1$ oraz $\theta = \theta_2$) kiedy $\Delta\beta \ll \beta$ i $\Delta\theta \ll \theta$. (1 punkt)