

do zdobycia 300 możliwych punktów za 3 zadania, po 100 punktów za każde zadanie

I. Gromada w Pannie

Gromada galaktyk w Pannie jest najbliższą dużą gromadą, rozciągającą się na prawie 10 stopni nieba i zawierająca wiele jasnych galaktyk. Ciekawym zagadnieniem jest określenie odległości do gromady w Pannie i wywnioskowanie z tego pewnych danych kosmologicznych. Poniższa tabela przedstawia oszacowania odległości na podstawie różnych metod wyznaczania odległości (opisanych w lewej kolumnie). W prawej kolumnie podano średnie odległości $d_i \pm$ odchylenie standardowe s_i .

i	wskaźnik odległości	odległość (Mpc)
1	Cefeidy	149 ± 1.2
2	Nowe	211 ± 3.9
3	Mgławice planetarne	152 ± 1.1
4	Gromady kuliste	188 ± 3.8
5	Fluktuacje jasności powierzchni	159 ± 0.9
6	Zależność Tully'ego-Fishera	158 ± 1.5
7	Zależność Fabera-Jacksona	168 ± 2.4
8	Supernowe typu Ia	194 ± 5.0

1. Stosując średnią ważoną, oblicz średnią z powyższych odległości (wynik możemy przyjąć jako oszacowanie odległości do gromady w Pannie)

$$d_{avg} = \frac{\sum_i \frac{d_i}{s_i^2}}{\sum_i \frac{1}{s_i^2}}$$

gdzie sumujemy po wyżej wymienionych ośmiu wskaźnikach odległości.

2. Jaka jest niepewność (pierwiastek z średniej kwadratów) tego oszacowania w jednostkach Mpc?
3. Widma galaktyk w Pannie wykazują średnią prędkość oddalania się gromady 1136 km/s. Oszacuj wartość stałej Hubble'a H_0 oraz niepewność (w sensie pierwiastka z średniej kwadratów).
4. Na podstawie wartości stałej Hubble'a z poprzedniej części, podaj wartość i niepewność czasu Hubble'a (oszacowanie wieku Wszechświata).

II. Wyznaczenie mas gwiazd w wizualnym układzie podwójnym

Gwiazda α -Centauri (Rigel Kentaurus) jest gwiazdą potrójną składającą się z dwóch gwiazd ciągu głównego α -Centauri A i α -Centauri B tworzących wizualny układ podwójny oraz z trzeciej gwiazdy zwanej Proxima Centauri, która jest mniejsza i słabsza niż pozostałe. Odległość kątowna pomiędzy α -Centauri A i α -Centauri B wynosi $17.59''$. Układ podwójny ma okres orbitalny 79.24 lat. Jasności wizualne w magnitudo α -Centauri A i α -Centauri B wynoszą odpowiednio -0.01 i 1.34. Ich wskaźniki barwy wynoszą odpowiednio 0.65 i 0.85. Korzystając z danych podanych poniżej odpowiedź na zadane pytania.

Dane dla gwiazd ciągu głównego

$(B - V)_0$	T_{eff}	BC
-0.25	24500	2.30
-0.23	21000	2.15
-0.20	17700	1.80
-0.15	14000	1.20
-0.10	11800	0.61
-0.05	10500	0.33
0.00	9480	0.15
0.10	8530	0.04
0.20	7910	0
0.30	7450	0
0.40	6800	0
0.50	6310	0.03
0.60	5910	0.07
0.70	5540	0.12
0.80	5330	0.19
0.90	5090	0.28
1.00	4840	0.40
1.20	4350	0.75

BC =Poprawka bolometryczna, $(B - V)_0$ =Wskaźnik barwy

Pytania:

1. Narysuj wykres BC od $(B - V)_0$.

2. Korzystając z otrzymanej krzywej wyznacz widome jasności bolometryczne gwiazd α -Centauri A i α -Centauri B.
3. Wyznacz masy obu gwiazd.

Uwagi:

1. **Poprawka bolometryczna (BC)** to poprawka, którą trzeba uwzględnić aby zamienić jasność widomą obiektu w jasność bolometryczną:

$$BC = m_v - m_{bol} \text{ lub } BC = M_v - M_{bol}$$

2. **Zależność masa – jasność:** $M_{bol} = -10.2 \log \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) + 4.9$

III. Wiek metorytu

Podstawowe równanie rozpadu promieniotwórczego można napisać w następujący sposób:

$$N(t) = N_0 \exp (-\lambda t)$$

gdzie $N(t)$ i N_0 to odpowiednio liczba atomów izotopu promieniotwórczego pozostałych po czasie t oraz ich pierwotna liczba w chwili $t = 0$, a λ oznacza stałą rozpadu promieniotwórczego. W wyniku rozpadu powstaje liczba $D(t)$ atomów izotopów pochodnych, gdzie

$$D(t) = N_0 - N(t) .$$

Na tej podstawie grupa astronomów bada pewną liczbę próbek meteorytów w celu określenia ich wieku. Posiadają dwa rodzaje próbek: chondryty z Allende (A) i achondryty bazaltowe (B). Badając te próbki, mierzą obfitość ^{87}Rb i ^{87}Sr zakładając, że ^{87}Sr powstał w całości w wyniku rozpadu ^{87}Rb . Wartość λ wynosi 1.42×10^{-11} na rok dla tego rozpadu. Dodatkowo zmierzono obfitość pierwiastka ^{86}Sr , który nie pochodzi z rozpadu promieniotwórczego. Wyniki pomiarów podano poniżej, podając obfitość w jednostkach ppm (part per million).

Nr. próbki	Rodzaj meteorytu	^{86}Sr (ppm)	^{87}Rb (ppm)	^{87}Sr (ppm)
1	A	29.6	0.3	20.7
2	B	58.7	68.5	44.7
3	B	74.2	14.4	52.9
4	A	40.2	7.0	28.6
5	A	19.7	0.4	13.8
6	B	37.9	31.6	28.4
7	A	33.4	4.0	23.6
8	B	29.8	105.0	26.4
9	A	9.8	0.8	6.9
10	B	18.5	44.0	15.4

Pytania:

1. Wyraż czas t w funkcji $\frac{D(t)}{N(t)}$
2. Wylicz czas połowicznego rozpadu $t_{1/2}$, t.j. czas potrzebny do rozpadu połowy pierwotnej liczby atomów.
3. Stosunek obfitości dwóch izotopów jest bardziej przydatny niż bezwzględna wartość obfitości każdego izotopu. Jest również całkiem prawdopodobne, że w próbce była pewna pierwotna ilość strontu. Biorąc $\left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ jako zmienną niezależną i $\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ jako zmienną zależną, wylicz parametry prostego modelu regresji liniowej, który opisuje dane.
4. Narysuj wykres $\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ od $\left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ i dopasowane linie regresji (izochrony) dla obu rodzajów meteorytów. (Do obliczeń pośrednich użyj minimum 7 cyfr po przecinku.)
5. Określ wiek obu rodzajów meteorów i błąd. Który jest starszy?
6. Określ pierwotną wartość $\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)_0$ dla obu rodzajów meteorów wraz z błędami.

Wyjaśnienia:

Prosty model regresji liniowej $y=a+bx$ można dopasować do zbioru danych (X_i, Y_i) , $i=1, \dots, n$, gdzie

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

oraz

$$SS_{xx} : \text{suma kwadratów dla } X = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

$$SS_{yy} : \text{suma kwadratów dla } Y = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2$$

$$SS_{xy} : \text{suma kwadratów dla } X \text{ i } Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$$

Odchylenie standardowe każdego parametru a i b można wyliczyć na podstawie

$$s_a = \sqrt{\frac{SS_{yy} - \frac{(SS_{xy})^2}{SS_{xx}}}{(n-2)SS_{xx}}} \times \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$s_b = \sqrt{\frac{SS_{yy} - \frac{(SS_{xy})^2}{SS_{xx}}}{(n-2)SS_{xx}}}$$