Long theoretical questions – solutions and points

Question 1 – Transit of an exoplanet

Max 30 points

Calculation of the angular distance on the orbit which the planet travels during the transit **6**
Since the orbit is circular,

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi t}{T}$$

where t and T are, respectively, the duration of the transit and the orbital period of the planet. We can leave the angle as $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ as this will be useful later; the numerical value of this expressiob is about 0.112.

Calculation of the velocity of the planet **10**
The velocity v at the beginning and end of the transit and the measured difference in velocities Δv form an isosceles triangle, with the angle between the equal sides = 2α.
Thus

$$2v\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\Delta v$$

from which we get a velocity equal to about 134 km/h. **2**

Calculation of the radius of the orbit **2**
since we know the velocity on a circular orbit, this is trivial:

$$2\pi r=vT\Rightarrow r=\frac{vT}{2\pi}$$

Substituting we get about $6.4\cdot 10^{6}$ km. **2**

Calculation of the radius of the star **2**
With the velocity on the orbit and the transit duration, we get the radius of the star:
$2R=tv\Rightarrow R=\frac{tv}{2}$ = $7.5\cdot 10^{5}$ km . The star is thus similar to the Sun in size. **2**

Calculation of the mass of the :

Given the orbital speed and radius, do this in the usual way:

$$\frac{v^2}{r}=\frac{GM}{r^2}$$ **2**

thus

$$M=\frac{v^2 r}{G}$$

The mass is therefore about $1{,}8\cdot 10^{30}$ kg, so again similar to the mass of the Sun. **2**

Question 2 – Brightness of an elliptical galaxy

Max 30 points

1) The luminosity distance is defined to satisfy the canonical inverse square law of the bolometric luminosity L (total emitted radiation power) and observed flux F (flux-luminosity relationship)

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \qquad (1)$$

Units of the flux and luminosity are expressed in SI (W·m^{-2} and W respectively),

10%

2)
Only the part of the spectrum (namely B-band) is observed, but the inverse square law is applicable

$$\frac{L_\lambda\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)}{L_\lambda(\lambda)} \cdot \frac{1}{1+z} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^4 \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-5}$$

also to the monochromatic luminosity and monochromatic flux.

Monochromatic flux is sometimes called as spectral density of flux (energy per unit time per unit area per unit wavelength) while monochromatic luminosity as spectral density of the luminosity (energy per unit time per unit wavelength). Their form is described by SED and thus spectral index.

$$S(\lambda_o)d\lambda_o = \frac{L_\lambda(\lambda_e)}{4\pi d_L^2} \cdot d\lambda_e,$$

The flux in the blue band is expressed as $F_B = \int R_B(\lambda) S(\lambda) d\lambda$, where $R_B(\lambda)$ denotes relative sensitivity in the blue bandpass.
Observed fraction of the total spectrum is redshifted into the frame of the observer, and a relationship between the observed and emitted wavelengths, λ_o and λ_{em}, can be expressed as $\lambda_{em} = \lambda_o/(1 + z)$.
So,

$$\boxed{S(\lambda_o)d\lambda_o = \frac{1}{4\pi d_L^2} \cdot L_\lambda\left(\frac{\lambda_o}{1+z}\right) \cdot \frac{1}{1+z} d\lambda_o\,.} \qquad (2)$$

30%

3)
The absolute luminosity is defined as the flux would be observed at a distance of 10 pc from the compact source at rest (not redshifted):

$$S_{10}(\lambda) = \frac{L_\lambda(\lambda)}{4\pi d_{10}^2}, \qquad (3)$$

where d_{10} is the distance equal to 10 pc, S_{10} denotes a monochromatic flux in the wavelength of λ measured at 10 pc from the object.

10%

4)
Dividing eq. (2) by (3) we get

$$\frac{S(\lambda)}{S_{10}(\lambda)} = \left(\frac{d_{10}}{d_L}\right)^2 \cdot \frac{L_\lambda\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)}{L_\lambda(\lambda)} \cdot \frac{1}{1+z} \qquad (4)$$

for all the wavelengths. Using the SED of the galaxy, we get

$$\frac{L_\lambda\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)}{L_\lambda(\lambda)} \cdot \frac{1}{1+z} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^4 \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-5} \qquad (5)$$

$$\frac{S(\lambda)}{S_{10}(\lambda)} = \left(\frac{d_{10}}{d_L}\right)^2 \cdot (1+z)^{-5} \tag{6}$$

The fraction of the monochromatic fluxes $S(\lambda)/S_{10}(\lambda)$ does not depend on the wavelength! So the relation (6) is valid also for blue band fluxes.

30%

5)
The blue fluxes F and F_{10} have to be replaced by the corresponding magnitudes.
Using Pogson's Ratio it can be obtained:

$$m_B - M_B = -2.5\log\left(\frac{F}{F_{10}}\right) = 5\log\left(\frac{d_L}{d_{10}}\right) + 12.5\log(1+z)$$

$$M_B = m_B - 5\log\left(\frac{d_L}{d_{10}}\right) + 12.5\log(1+z) \tag{7}$$

10%

6)
Substituting numerical data one can obtain:

$$M_B = 20.40^{mag} - 5\log\left(2754\cdot 10^5\right) - 12.5\log(1.5) = -24.00^{\text{mag}}$$

$$M_B = -24.00^{\text{mag}} \tag{8}$$

Please note, that precision is determined by m_B !

10%

7)
Only the cD galaxies are so luminous, while the normal elliptical galaxies are substantially weaker. Accordingly, the galaxy is not a member of the cluster, but is a foreground object.

10%

Question 3 – Proper motion

Max 30 points

Określenie różnic współrzędnych : 1
Przeliczenie odległości na sferze na jednostki długości : 2
Różnica odległości radialnych wynosi około $1,58 \cdot 10^{15} m$
Różnica w rektascencji wynosi $2,4767^o$
Różnica w deklinacji wynosi $1,84^o$
Obliczenie odległości kątowej na sferze : 3
Oznacza to, że różnica kątowa na sferze wynosi około $3,09^o$
Obliczenie odległości w płaszczyźnie prostopadłej do linii widzenia : 3
Korzystając z funkcji trygonometrycznych i odległości od Słońca uzyskujemy odległość $2,1 \cdot 10^{15} m$
.
Obliczenie odległości między gwiazdami : 4
Całkowita odległość gwiazd wynosi więc $2,63 \cdot 10^{15} m$ (powyższe wyniki uzyskuje się przez trywialne zamiany jednostek, odejmowania i użycie tw. Pitagorasa; rachunki łatwe choć dość żmudne).
Obliczenie różnicy prędkości kątowej w deklinacji i rektascencji : 2
Wykonując identyczne rachunki (różnica prędkości kątowych 0.18 arcsec/y zarówno dla deklinacji jak i rektascencji)
Przeliczenie prędkości kątowej na sferze na prędkość liniową: 2
Dla prędkości stwierdzamy, że prędkość „na sferze" wynosi kilkanaście kilometrów na sekundę (ok.15 ;nie podano prędkości radialnych).
Zauważenie, że prędkość „na sferze" jest oszacowaniem od dołu prędkości całkowitej : 2
Oczywiście to oszacowanie „od dołu" całkowitej prędkości.
Porównanie uzyskanej prędkości z prędkością spodziewaną dla obliczonej odległości między gwiazdami : 4
Przy odległości kilkunastu tysięcy AU to zbyt duża prędkość by gwiazdy te tworzyły układ związany nawet przy b. wielkich masach gwiazd. Dla lekkiej i ciężkiej, ciężka miałaby masę tysięcy mas Słońca!
Wyciągnięcie z uzyskanych wyników wniosku i odpowiedź : 2