

Instrukcja

- 1) W swojej teczce znajdziesz następujące materiały:
 - a) Karty odpowiedzi
 - b) Kartki brudnopisu
 - c) Kopertę z zadaniami w wersji angielskiej oraz tłumaczenie na język polski.
- 2) Rozwiązania zadań powinny być zapisane jedynie na karcie odpowiedzi. **PROSZĘ PISAĆ TYLKO Z JEDNEJ STRONY KARTKI ! NIE UŻYWAJ DRUGIEJ STRONY KARTY ODPOWIEDZI.** Sędzia nie bierze pod uwagę niczego zapisanego na rewersie karty odpowiedzi.
- 3) Brudnopis jest przeznaczony tylko do twojego użytku na próbne rozwiązania, notatki itp. **UWAGA** Brudnopis nie będzie brany pod uwagę i nie będzie zbierany razem z rozwiązaniami. Wszystko co ważne dla rozwiązania zadania powinno być zapisane na karcie odpowiedzi.
- 4) Każde zadanie powinno rozpoczynać się na nowej karcie odpowiedzi.
- 5) Na każdej stronie wpisz w oznaczonych miejscach następujące informacje:
 - a) W kwadracie „PROBLEM NO.” zanotuj numer zadania od 1 do 3. Każda strona dotycząca rozwiązania tego zadania powinna również mieć zapisany ten sam numer;
 - b) W polu „Student ID” – wpisz swój kod składający się z 3 liter i 2 cyfr.
 - c) W polu „page no.” wpisz kolejne numery kartek zaczynając od 1. Radzimy ponumerować kartki po zakończeniu rozwiązywania zadań
- 6) Sędziowie nie znają polskiego ale rozumieją uniwersalny język matematyki, staraj się zapisać tyle równań i przekształceń aby twoje rozumowanie było jak najbardziej zrozumiałe dla sędziego. Jeśli konieczne są jakieś opisy słowne zapisz je po angielsku (o ile to możliwe).
- 7) Używaj jedynie długopisu znajdującego się na twoim biurku. Ołówek przeznaczony jest do wykonywania szkiców i rysunków.
- 8) Po zakończeniu testu:
 - a) Nie zapomnij uporządkować wszystkie kartki;
 - b) Kartki z odpowiedziami umieść w teczce 1. Sprawdź czy wszystkie kartki oznaczone są twoim kodem oraz czy mają zapisany poprawnie numer zadania i czy wszystkie kartki są ponumerowane i ułożone w odpowiedniej kolejności.
 - c) Sprawdź razem z sędzią liczbę kartek z odpowiedziami, zapiszcie ten numer na teczce oraz podpisz się.
 - d) Brudnopisy umieść w osobnej teczce
- 9) Idź sobie popływać

Po Wodzenia!

Zadanie 1 Czarna dziura w Drodze Mlecznej

Wiele faktów obserwacyjnych wskazuje na istnienie supermasywnej czarnej dziupli w środku naszej Galaktyki. Jej położenie pokrywa się z radioźródłem Sagittarius A* (SA*).

Gwiazda S* krąży wokół SA*.

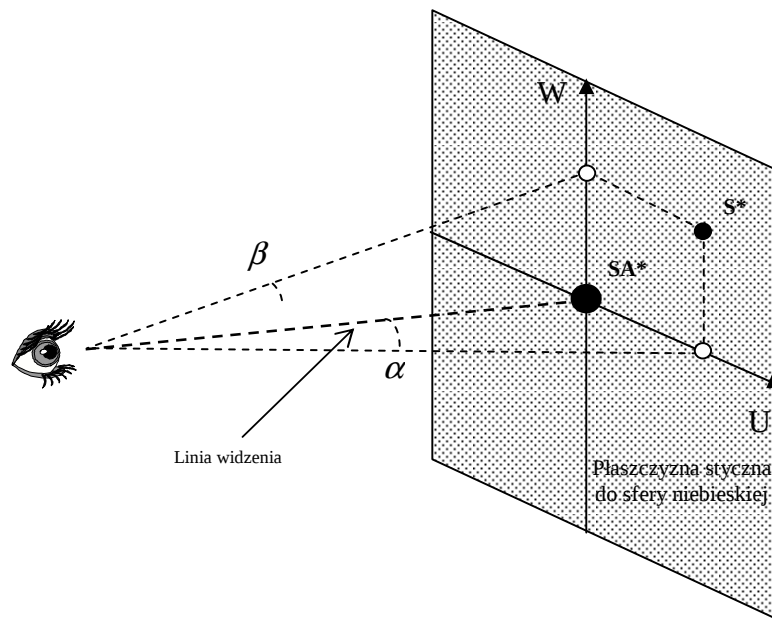
W tabeli 1 znajdują się następujące wartości: czas obserwacji i pozycja kątowa (α ; β) gwiazdy S*.

Współrzędne kątowe odpowiadają współrzędnym kartezjańskim (U , W) o środku w SA* (patrz rysunek 1).

Odległość kątowa $\varphi = 1''$ (sekundy łuku) w płaszczyźnie stycznej do sfery niebieskiej odpowiada odcinkowi o długości $d = 41$ dni świetlnych w odległości SA*, więc skala wynosi:

$$S_0 = \frac{d}{\varphi} = 41 \frac{\text{dni świetlnych}}{''}.$$

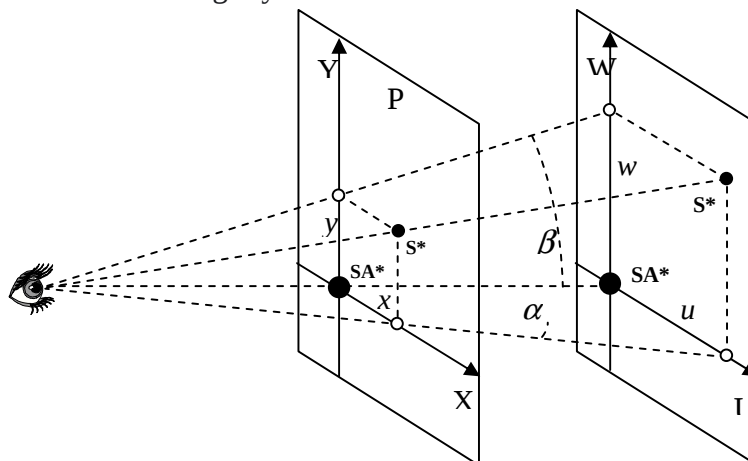
	Data (rok)	$\alpha('')$	$\beta('')$
1	1995.222	0.117	- 0.166
2	1997.526	0.097	- 0.189
3	1998.326	0.087	- 0.192
4	1999.041	0.077	- 0.193
5	2000.414	0.052	- 0.183
6	2001.169	0.036	- 0.167
7	2002.831	- 0.000	- 0.120
8	2003.584	- 0.016	- 0.083
9	2004.165	- 0.026	- 0.041
10	2004.585	- 0.017	0.008
11	2004.655	- 0.004	0.014
12	2004.734	0.008	0.017
13	2004.839	0.021	0.012
14	2004.936	0.037	0.009
15	2005.503	0.072	- 0.024
16	2006.041	0.088	- 0.050
17	2007.060	0.108	- 0.091



Rys. 1

Korzystając z powyższych informacji wykonaj następujące zadania:

- a) Narysuj trajektorię gwiazdy S^* w płaszczyźnie P (patrz rysunek 2). Ta płaszczyzna znajduje się blisko obserwatora. W tym przypadku, kąt $\varphi = 1''$ odpowiada liniowej odległości $d_0 = 1200$ mm i skala wynosi $S = \frac{d_0}{\varphi} = 1200 \frac{\text{mm}}{''}$. Użyj papieru milimetrowego, kalki i transparencji do wykonania dokładnego rysunku.

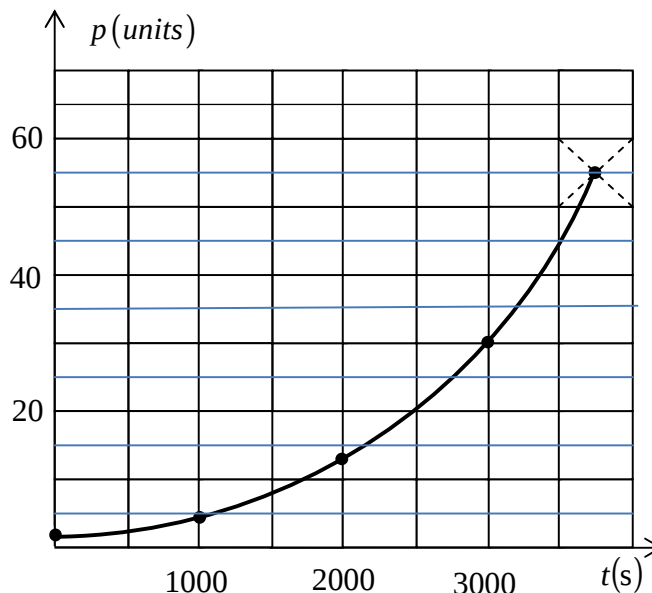


Rys. 2

- b) Korzystając z rysunku udowodnij, że płaszczyzna orbity jest prostopadła do linii widzenia.
- c) Korzystając z rysunku, wyznacz następujące parametry rzeczywistej orbity gwiazdy S* wokół SA*:
- a - wielką półoś orbity (w dniach świetlnych), b - małą półoś orbity (w dniach świetlnych), e - mimośród;
 - $r_{\min}$ – minimalną odległość między S* i SA* (w dniach świetlnych), $r_{\max}$ - maksymalną odległość między S* a SA* (w dniach świetlnych);
 - Odległość między obserwatorem a S*.
 - Okres orbitalny gwiazdy S* wokół SA* (wykorzystując możliwie dużo punktów pomiarowych i biorąc średnią, otrzymasz najdokładniejszą wartość);
 - Całkowitą masę układu SA* - S*.
- Dla otrzymania maksymalnej dokładności, sugerujemy zapisywanie pośrednich i końcowych obliczeń. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Zadanie 2 Trochę termodynamiki

Hipotetyczny statek kosmiczny startuje w celu zbadania atmosfer dwóch pozasłonecznych planet P_1 i P_2 (atmosfery składają się w 100% z CO_2). Obie atmosfery są w statycznej równowadze termodynamicznej. Kiedy statek znalazł się na miejscu, wystrzelono w kierunku planet próbniki, opadające radialnie (wzdłuż przedłużeń promieni planet). Po osiągnięciu przez próbnik stałej prędkości, zaczyna on przysyłać dane o ciśnieniu w atmosferze. Na rysunku 3.1 narysowano wartości zmierzonego ciśnienia atmosfery (w jednostkach umownych) jako funkcję czasu opadania dla planety P_1 . Kiedy próbnik opadł na powierzchnię planety P_1 , przesłał informację o temperaturze $T_0 = 700 \text{ K}$ i wartości przyspieszenia grawitacyjnego $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.



Rys. 3.1.

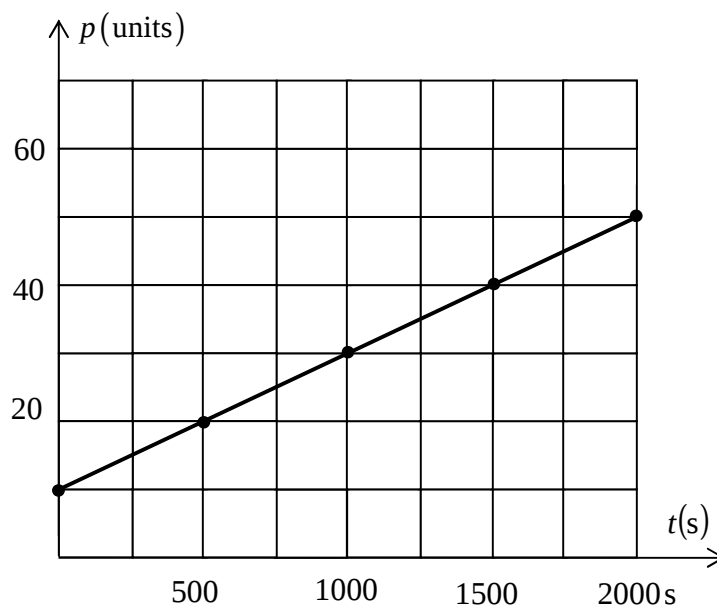
Zakładamy, że przyspieszenie grawitacyjne na każdej z planet jest stałe podczas jednostajnego spadku próbników.

a) Znajdź wysokość h_0 na jakiej próbnik R_1 rozpoczął jednostajny spadek i przesyłanie danych.

b) Znajdź temperaturę atmosfery planety P_1 na wysokości $h = 39,6$ km. Wartość stałej gazowej wynosi $R = 8,3$ J/(mol·K), masa molowa CO_2 to $\mu = 44$ g/mol.

c) Na rysunku 3.2 narysowano wartości ciśnienia atmosferycznego (w jednostkach umownych) jako funkcję czasu spadku w atmosferze planety P_2 . Kiedy próbnik opadł na powierzchnię planety przesłał informację o temperaturze $T_0 = 750$ K i przyspieszeniu grawitacyjnym $g_0 = 8$ m/s².

Narysuj wykresy z zależnościami $p = f(h)$ i $T = f(h)$ dla atmosfery planety P_2 .



Rys. 3.2.

Zadanie 3. Obserwator IOAA na planecie pozasłonecznej

Syriusz należący do gwiazdozbioru Wielkiego Psa, jest najjaśniejszą gwiazdą nocnego nieba na Ziemi. Choć gołym okiem obserwujemy gwiazdę pojedynczą, to jest on układem podwójnym. Duża jasność Syriusza wynika z dwóch powodów; jego własnej mocy promieniowania oraz bliskości Ziemi.

Mizar to wielokrotny system gwiazdny w gwiazdozborze Wielkiej Niedźwiedzicy, składa się z 4 gwiazd ułożonych niemal na jednym kierunku patrzenia dla obserwatora na Ziemi. Tylko niektóre z tych gwiazd są związane grawitacyjnie.

Założmy, że obserwator A znajduje się na jednej z planet systemu Syriusza.

Oblicz:

- Widomą wielkość gwiazdową Słońca dla obserwatora A ($m_{\text{Sun, Planet}}$).
- Widomą wielkość gwiazdową Syriusza również dla obserwatora A. ($m_{\text{SY, Planet}}$)
- Łączną moc promieniowania gwiazd systemu Mizara, L_{Mizar} ;
- Średnią odległość od Ziemi tych gwiazd systemu Mizara które są związane ze sobą grawitacyjnie,
- Odległość kątową Mizara od Syriusza dla obserwatora na Ziemi., $\Delta\theta$;
- Odległość pomiędzy gwiazdami związanymi grawitacyjnie z systemu Mizara a obserwatorem A. ($d_{\text{Mizar, Planet}}$)
- Łączną wielkość gwiazdową całego systemu Mizara dla obserwatora A. ($m_{\text{Mizar, Planet}}$)

Oszacuj niepewności otrzymanych wyników.

Skorzystaj z następujących danych:

$d_{\text{Sirius, Earth}} = 2.6 \text{ pc}$ - odległość Syriusz - Ziemia;

$m_{\text{Sirius, Earth}} = -1.46^{\text{m}}$ - widoma wielkość gwiazdowa Syriusza, mierzona z Ziemi;

$d_{\text{Sun, Earth}} = 1 \text{ AU}$ - odległość Słońce – Ziemia;

$m_{\text{Sun, Earth}} = -26,78^{\text{m}}$ - widoma wielkość gwiazdowa Słońca, mierzona z Ziemi;

$d_{\text{Sirius, Planet}} = 10 \text{ AU}$ - odległość planety z obserwatorem A od Syriusza;

W tabelce poniżej podano informacje o gwiazdach systemu Mizara dla obserwatora ziemskiego:

Gwiazda numer:	Nazwa	Obserwowana wielkość gwiazdowa	Paralaksa (w milisekundach łuku)
1	Alcor	3.99 ± 0.01	39.91 ± 0.13
2	Mizar A	2.23 ± 0.01	38.01 ± 1.71
3	Mizar B	3.86 ± 0.01	38.01 ± 1.71
4	Sidus Ludoviciana	7.56 ± 0.01	8 ± 4

Współrzędne równikowe Mizara (σ_1) oraz Syriusza (σ_2) dla obserwatora ziemskiego wynoszą:

$$\alpha_{Mizar} = \alpha_1 = 13^h 23^m 55.5^s; \delta_{Mizar} = \delta_1 = 54^\circ 55' 31'';$$

$$\alpha_{Sirius} = \alpha_2 = 6^h 45^m; \delta_{Sirius} = \delta_2 = -16^\circ 43'.$$

Zauważ, że:

$$\ln(1 - x) \approx -x \text{ dla } x \ll 1$$

$$e^x \approx 1 + x \text{ dla } x \ll 1$$

