



CZEŚĆ TEORETYCZNA
Zadania krótkie

page 1 from 8



**8th International Olympiad
on Astronomy and Astrophysics**
Suceava – Gura Humorului – August 2014

Instrukcje

- 1) W teczce znajdziesz:
 - a) Karty odpowiedzi
 - b) Kartki brudnopisu
 - c) Kopertę z treściami zadań
 - d) Kopertę z treściami zadań. Rozwiązania problemów powinny być umieszczone jedynie na kartach odpowiedzi, które otrzymujesz. **PISZ JEDYNIENIE NA ZADRUKOWANEJ STRONIE KARTY ODPOWIEDZI. NIE UŻYWAJ TYLNEJ STRONY KARTKI.** Oceniający nie będzie brał pod uwagę żadnych zapisków na tylnej stronie karty odpowiedzi.
- 2) Brudnopis załączono dla twoich prywatnych notatek – prób obliczeń, zapisania liczb, itp. UWAGA: Kartki brudnopisu nie są brane pod uwagę przy ocenie rozwiązań, po zakończeniu będą one zebrane osobno. Wszystko, co uważasz za część odpowiedzi, musi znaleźć się na kartach odpowiedzi.
- 3) Każde zadanie musi zaczynać się na osobnej karcie odpowiedzi.
- 4) Na każdej karcie odpowiedzi wypełnij następujące pola:
 - a) W polu "PROBLEM NO." wpisz numer problemu: dla krótkich zadań odpowiednio 1 do 12, dla długich: 13 do 15. Każda karta odpowiedzi zawierająca rozwiązanie zadania powinna w polu "PROBLEM NO." zawierać jego numer;
 - b) W polu "Student ID" wpisz swój identyfikator, który znajduje się na twojej kopercie – składa się on z 3 liter i 2 cyfr
 - c) W polu "page no." wpisz numer strony, zaczynając od 1. Zalecane jest, by wypełniać pola po zakończeniu rozwiązywania.
- 5) Oceniający nie rozumieją języka polskiego, ale język matematyki jest uniwersalny. Używaj możliwie dużo wyrażeń matematycznych, które uważasz za pomocne oceniającemu. Jeśli chcesz coś wyjaśnić słownie, zalecane jest, by w miarę możliwości używać krótkich komentarzy w języku angielskim.
- 6) Używaj długopisu, który znajdziesz na biurku. Zalecamy, by używać ołówka do szkiców rozwiązań.
- 7) Po zakończeniu testu:
 - a) Pamiętaj, by ułożyć karty rozwiązań w odpowiedniej kolejności;
 - b) Umieść karty rozwiązań w teczce 1. Sprawdź, czy wszystkie karty zawierają twój identyfikator, poprawny numer zadania oraz że wszystkie strony są ponumerowane i we właściwej kolejności.
 - c) Sprawdź z sędzią-asystentem, że składasz odpowiednią ilość kart odpowiedzi, po czym wypełnij numer na okładce teczki i podpisz ją.
 - d) Umieść kartki brudnopisu w wyznaczonej do tego teczce. Umieść rozwiązania z powrotem w kopercie.
 - e) Idź popływać.

POWADZENIA !

Problem 1. Punkty Lagrange'a

Punkty Lagrange'a to pięć takich miejsc w konfiguracji orbitalnej (załóż orbity kołowe), że znajdujące się w nich małe ciało jest nieruchome względem dwóch masywnych ciał, oddziałując z nimi tylko grawitacyjnie. Przykładowo, ciałem takim może być sztuczny satelita, a dużymi ciałami Ziemia i Księżyc lub Ziemia i Słońce. Na **Rysunku 1** przedstawiono dwa możliwe położenia punktu Lagrange'a L_3 względem układu Ziemia - Słońce. Która z dwóch lokalizacji L_3^1 i L_3^2 może odpowiadać rzeczywistemu punktowi Lagrange'a względem układu Ziemia - Słońce? Uzasadnij swoją odpowiedź za pomocą odpowiednich równań i oblicz różnicę pomiędzy 1 AU a odległością Słońce - L_3 .

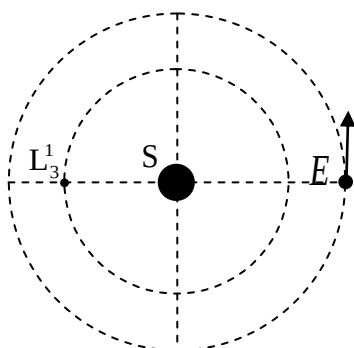


Figure 1A

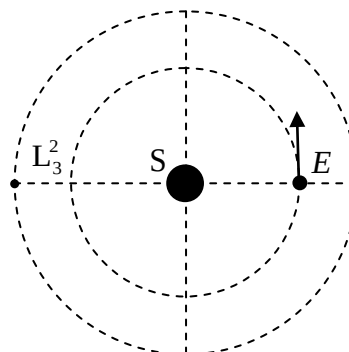


Figure 1B

Dane: odległość Ziemia - Słońce $d_{ES} = 14.96 \cdot 10^7$ km

stosunek masy Ziemi do masy Słońca: $M_E / M_S = 1/332946$

Problem 2. Katastrofa grawitacyjna!

Podczas katastrofy grawitacyjnej, masa Słońca spada natychmiastowo do połowy swojej aktualnej wartości. Jeśli założysz, że rzeczywista orbita Ziemi jest eliptyczna, jej okres orbitalny to $T_0 = 1 \text{ year}$, a mimośród $e_0 = 0,0167$.

Jaki będzie nowy okres orbitalny Ziemi, jeśli katastrofa nastąpi: a) 3 lipca (aphelium) b) 3 stycznia.

Problem 3. Promieniowanie kosmiczne

Podczas badań promieniowania kosmicznego odkryto niestabilną neutralną cząstkę – pion π^0 . Masa spoczynkowa pionu π^0 jest znacznie większa niż masa spoczynkowa elektronu. Badania wykazują, że podczas lotu pion π^0 może ulec rozpadowi na 2 fotony. W rozważanym przypadku jeden z nich ma maksymalną możliwą energię $E_{\max}$, a drugi minimalną możliwą energię $E_{\min}$.

Wyraż prędkość początkową pionu π^0 jako funkcję $E_{\max}$ i $E_{\min}$. Możesz używać prędkości światła c jako znanej. Podczas rozwiązywania zadania możesz skorzystać ze związku pomiędzy energią a pędem dowolnej cząstki relatywistycznej:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Problem 4. Sandra Bullock i George Clooney

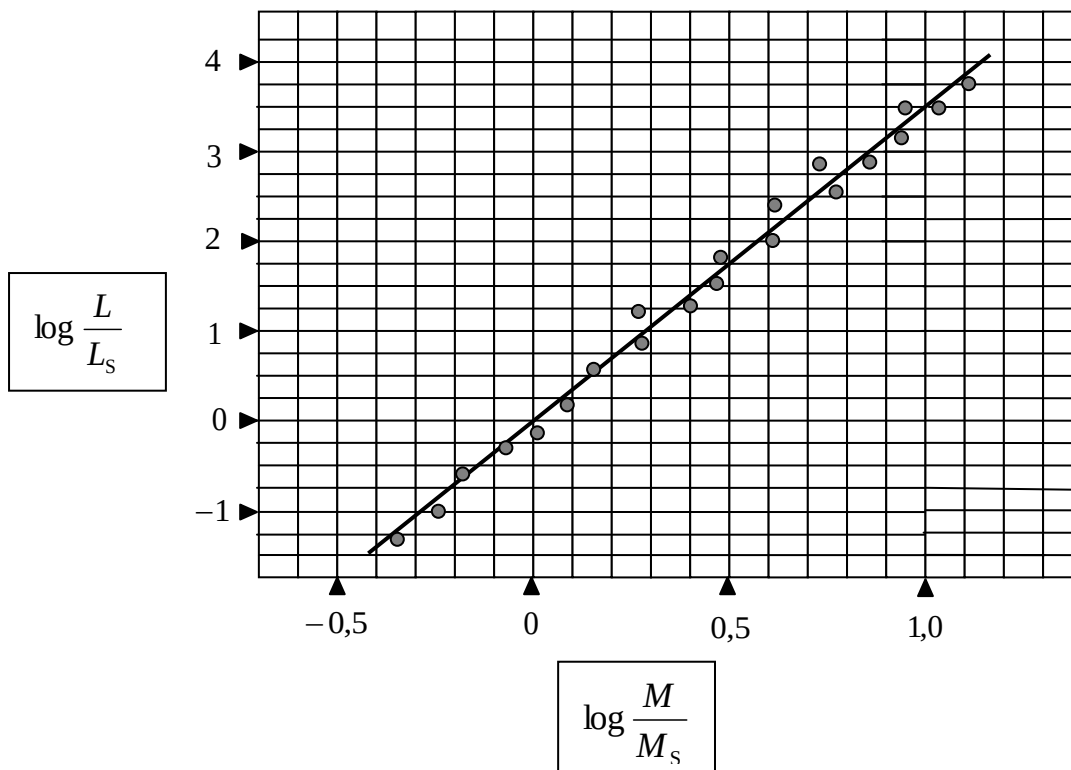
Astronauta o masie $M = 100\text{kg}$ wybrał się w przestrzeń kosmiczną w związku z misją naprawczą. Musiał naprawić satelitę nieruchomego względem statku kosmicznego, w odległości ok. $d = 90\text{m}$ od niego. Po skończeniu pracy astronauta zauważył, że systemy odpowiedzialne za jego powrót do promu kosmicznego są niesprawne oraz że zostało mu powietrza tylko na 3 minuty. Ze zdziwieniem stwierdził, że posiada hermetycznie zamkniętą cylindryczną puszkę (o polu powierzchni podstawy $S = 30\text{cm}^2$) mocno przymocowaną do jego rękawicy, zawierającą wewnątrz $m = 200\text{g}$ lodu. Lód nie wypełniał puszki całkowicie.

Czy astronauta będzie w stanie bezpiecznie powrócić do promu, zanim skończy się jego zapas powietrza; jeśli otworzy puszkę w odpowiednim kierunku? Krótko wyjaśnij swoje obliczenia. Astronauta nie może wyrzucać żadnych elementów wyposażenia ani dotykać satelity.

Możesz używać następujących danych: $T = 272\text{K}$ - temperatura lodu w puszcze, $p_s = 550\text{Pa}$ - ciśnienie pary nasyconej wody w temperaturze $T = 272\text{K}$; $R = 8300\text{J}/(\text{kmol K})$ - stała gazowa; $\mu = 18\text{kg}/\text{kmol}$ - masa molowa wody.

Problem 5. Czas życia gwiazdy na ciągu głównym

Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji $\log(L/L_s) = f(\log(M/M_s))$ dla danych zebranych z pewnej liczby gwiazd. L i M oznaczają odpowiednio moc promieniowania i masę danej gwiazdy, a L_s oraz M_s - moc promieniowania i masę Słońca.



Rysunek 2

Wyraż czas przebywania gwiazdy na ciągu głównym jako funkcję ułamka masy gwiazdy zamienianej na energię η oraz stosunku masy gwiazdy do masy Słońca γ . Weź pod uwagę następujące założenia: czas przebywania Słońca na ciągu głównym wynosi τ_s , każda gwiazda zamienia na energię część η swojej masy, Słońce zamienia na energię część η_s swojej masy, masa każdej gwiazdy wyraża się przez $\gamma = \frac{M}{M_s}$. Załóż też, że moc promieniowania gwiazdy nie zmienia się podczas całego czasu przebywania na ciągu głównym.

Problem 6. Temperatura efektywna powierzchni gwiazdy

Promieniowanie gwiazdy obserwowane jest w wąskim przedziale długości fali $\Delta\lambda \ll \lambda$, tzn. wartości długości fali zawierają się w przedziale od λ do $\lambda + \Delta\lambda$. Zgodnie z prawem Plancka (dla ciała doskonale czarnego), następująca zależność określa energię emitowaną przez gwiazdę w jednostce czasu, przechodzącą przez jednostkę jej powierzchni, na jednostkę długości fali promieniowania.

$$r = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \right)}$$

Monochromatyczne strumienie promieniowania o długościach fal λ_1 i λ_2 wynoszą odpowiednio $I_1(\lambda_1)$ oraz $I_2(\lambda_2)$. Oba odpowiadają przedziałowi $\Delta\lambda$ zmierzonemu na Ziemi.

Podaj zależności pomiędzy długościami fali λ_1 a λ_2 , jeśli $I_1(\lambda_1) = 2I_2(\lambda_2)$ oraz $hc \ll \lambda kT$.

Dane: h – stała Plancka; k – stała Boltzmanna; c – prędkość światła w próżni.

Wskazówka: Dla $x \ll 1$ spełnione jest przybliżenie $e^x \approx 1 + x$.

Problem 7. Ciśnienie promieniowania

Dla obserwatora na Ziemi ciśnienie promieniowania Słońca wynosi $p_{\text{rad},S}$ a ciśnienie promieniowania pewnej gwiazdy Σ ma wartość $p_{\text{rad},\Sigma}$.

Oblicz obserwowaną wielkość wizualną gwiazdy Σ , jeśli obserwowana wielkość wizualna Słońca wynosi m_s . W rozwiązywaniu problemu pomocne może się okazać następujące założenie:

W ogólności, ciśnienie promieniowania elektromagnetycznego w próżni równe jest gęstości jego energii

$$(p_{\text{rad}} = \frac{\Delta E}{\Delta V}).$$

Dane są następujące wielkości: M_s - masa Słońca, R_s - promień Słońca, G - stała grawitacji,

σ - stała Stefana-Boltzmanna, c – prędkość światła w próżni.

Problem 8. Statek kosmiczny na orbicie wokółsłonecznej

Sferyczny statek kosmiczny znajduje się na kołowej orbicie wokół Słońca i obraca się wokół osi prostopadłej do płaszczyzny swojej orbity. Temperatura zewnętrznej powierzchni statku wynosi T_N . Przyjmij, że statek jest ciałem doskonale czarnym, a w jego wnętrzu nie zachodzi żadna aktywność.

Jaka jest jasność obserwowana Słońca i jego średnica kątowa dla astronauty znajdującego się na pokładzie statku?

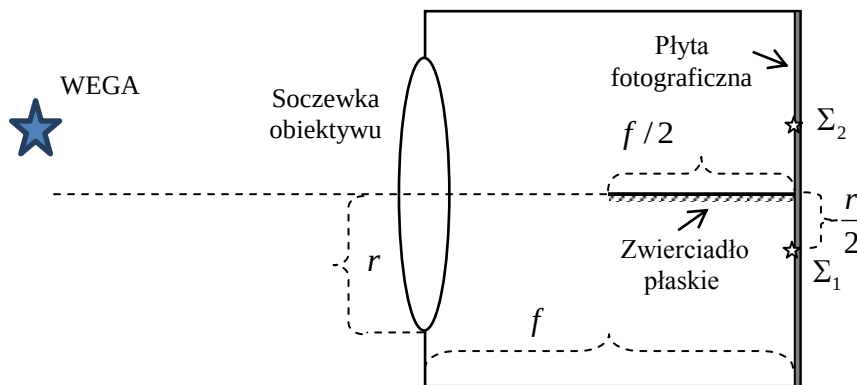
Znane są następujące wielkości: T_S - temperatura efektywna Słońca; R_S - promień Słońca;

d_0 - odległość Ziemia - Słońce; m_0 - jasność obserwowana Słońca na Ziemi; R_N - promień statku kosmicznego.

Problem 9. Wega w lustrze

Wewnątrz aparatu fotograficznego, wzdłuż osi optycznej obiektywu umieszczono lustro (jak pokazano na rysunku). Długość lustra jest równa połowie długości ogniskowej obiektywu. W płaszczyźnie ogniskowej aparatu umieszczona jest płyta fotograficzna. Zarejestrowano na niej dwa obrazy gwiazdy Wega, każdy o innej jasności (jak pokazano na rysunku). Wega nie znajduje się na osi optycznej soczewki. Odległość tej osi od obrazu Σ_1 wynosi $\frac{r}{2}$.

Jaka jest różnica wielkości gwiazdowych dwóch obrazów Wegi?



Rysunek 3

Problem 10. Gwiazdy o rumuńskich nazwach

Dwóch rumuńskich astronomów Ovidiu Tercu oraz Alex Dumitriu z Galati w Rumunii odkryli dwie gwiazdy zmienne. Ich współrzędne galaktyczne wynoszą: Galati V1 ($l=114.371^\circ; b=-11.35^\circ$) i Galati V2 ($l=113.266^\circ; b=-16.177^\circ$).

Oszacuj odległość kątową pomiędzy Galati V1 a Galati V2.

Problem 11. Jasność obserwowana Księżyca

Wielkość gwiazdowa Księżyca obserwowana ze Słońca wynosi $M_M = 0,25^m$. Oblicz wielkości gwiazdowe Księżyca (obserwowane z Ziemi) odpowiadające pełni oraz pierwszej kwadrze.

Dane: odległość Ziemia - Księżyc - $d_{ME} = 385000 \text{ km}$, odległość Słońce - Ziemia - $d_{ES} = 1 \text{ AU}$, odległość Słońce - Księżyc - $d_{MS} = 1 \text{ AU}$

Współczynnik korekcyjny jasności Księżyca związany z fazą i strukturą jego powierzchni ma postać:

$$p(\Psi) = \frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{\Psi}{\pi} \right) \cos \Psi + \frac{1}{\pi} \sin \Psi \right],$$

, gdzie Ψ to kąt fazowy.

Problem 12. Jasność absolutna cefeidy

Cefeidy to gwiazdy zmienne, których jasności zmieniają się z powodu pulsacji. Okres pulsacji cefeidy wyraża się wzorem:

$$P = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{KM}},$$

, gdzie: R – średni promień cefeidy; M – masa cefeidy (nie zmienia się podczas pulsacji). Możesz założyć, że temperatura pozostaje stała podczas pulsacji.

Pokaż, że średnia wielkość absolutna cefeidy M_{cef} zależy od okresu jej pulsacji zgodnie z następującą relacją:

$$M_{cef} = -2,5^m \cdot \log k - \left(\frac{10}{3} \right)^m \cdot \log P$$

, gdzie P to okres pulsacji cefeidy.