ZADANIA DŁUGIE

1. Pewien księżyc obiega planetę tak, że płaszczyzna jego orbity jest prostopadła do powierzchni w miejscu gdzie znajduje się obserwator. Z dokładnością do skali orbitę opisuje równanie:

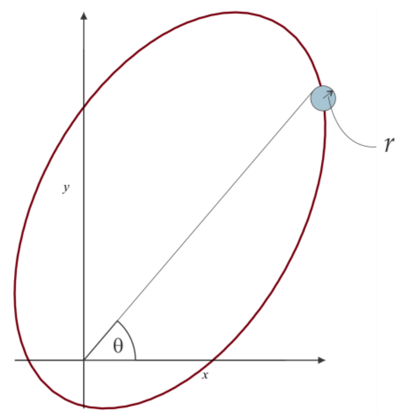
$$9\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}-4\right)^2+25\left(-\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=225$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych oś X znajduje się w płaszczyźnie horyzontu, a oś Y wskazuje zenit obserwatora. Niech r oznacza promień księżyca. Przyjmij, że okres rotacji planety jest znacznie dłuższy od okresu orbitalnego księżyca. Zaniedbaj refrakcję atmosferyczną

a. Oblicz długości wielkiej i małej półosi elipsy

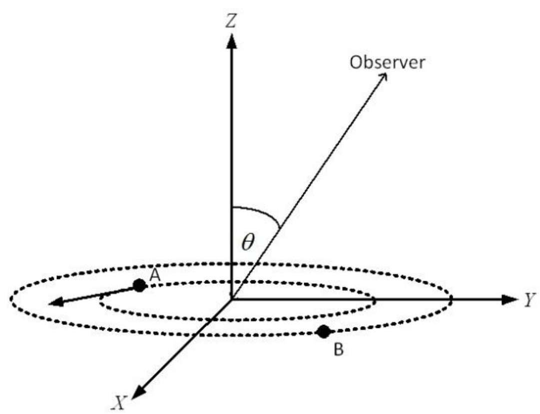
b. Oblicz odległość zenitalną perygeum.

c. Wyznacz $\tan\frac{\theta}{2}$ w chwili gdy księżyc jest największy dla obserwatora.
Kąt θ jest wysokścią prostej stycznej do górnego brzegu księżyca.



rysunek 1

2. Dwie masywne gwiazdy A i B o masach: odpowiednio m_A oraz m_B odległe są od siebie o dystans *d.* Obie orbitują wokół wspólnego środka masy pod wpływem siły grawitacji. Można przyjąć, że ich orbity są okręgami leżącymi w płaszczyźnie X-Y wyznaczonej przez środek masy (patrz rysunek 2)



rysunek 2

a. Znajdź wzór na prędkość tangencjalną oraz kątową dla gwiazdy A

Obserwator znajduje się na płaszczyźnie Y-Z w kierunku wyznaczonym przez kąt θ od osi Z (patrz rysunek 2) i obserwuje gwiazdy w dużej odległości. Zmierzył on, że prędkość radialna składnika A ma postać $K\,cos(\omega t + \varepsilon)$, gdzie K oraz ε są dodatnie.

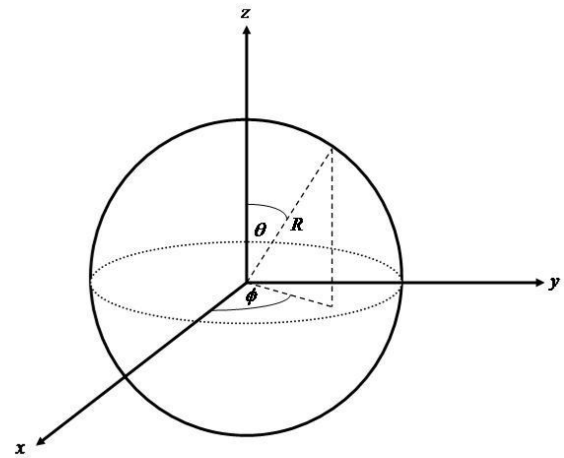
b. Przedstaw $K^3/\omega G$ jako funkcje m_A, m_B, oraz θ, gdzie *G* jest uniwersalną stałą grawitacji. Przyjmij, że obserwator określił, że masa gwiazdy A wynosi $30M_S$ (gdzie M_S to masa Słońca). Dodatkowo zaobserwował on promieniowanie X pochodzące ze składnika B, z czego wywnioskował, że składnik B może być gwiazdą neutronową lub czarną dziurą. Poprawność tego wniosku zależy od masy m_B:

i) gdy $m_B < 2M_S$, B jest gwiazdą neutronową ;

ii) gdy $m_B > 2M_S$,to B jest czarną dziurą.

c. Z obserwacji wynika, że $\frac{K^3}{\omega G} = \frac{1}{250} M_S$. W praktyce wartość kąta θ jest zwykle nieznana. Jaki warunek misi spełnić kąt θ, aby składnik B był czarną dziurą?

3. Przyjmij, że statyczna, sferyczna gwiazda składa się z N neutralnych cząstek o radius R (patrz rysunek 3).



rysunek 3

Gdzie $\mathbf{0 \leq \theta \leq \pi}$, $\mathbf{0 \leq \phi \leq 2\pi}$, spełniających następujące równanie stanu

$$\boldsymbol{P\,V = N\,k\,\frac{T_R - T_0}{\ln(T_R/T_0)}} \qquad (1)$$

P oraz V oznaczają odpowiednio ciśnienie we wnętrzu gwiazdy i jej objętość, a k jest stałą Boltzmanna. $\boldsymbol{T_R}$ i $\boldsymbol{T_0}$ oznaczają temperatury na powierzchni $(\boldsymbol{r = R})$ i w środku gwiazdy $(\boldsymbol{r = 0})$ Zakładamy, że $\boldsymbol{T_R \leq T_0}$.

a. Uprość równanie stanu gwiazdy (1) jeśli $\Delta \boldsymbol{T = T_R - T_0 \approx 0}$ (tzw. gwiazda idealna)

(Podpowiedź: użyj przybliżenia $\mathbf{ln(1 + \boldsymbol{x})} \approx \boldsymbol{x}$ dla małych x)

Przypuśćmy, że w gwieździe zachodzą jakieś procesy pseudostatyczne powodujące drobne rozszerzania się i kurczenia gwiazdy, jednak nie naruszające warunków równania (1).

Gwiazda spełnia pierwsze prawo termodynamiki

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Delta M c^2} + \boldsymbol{W} \tag{2}$$

gdzie Q, M, i W to odpowiednio: ciepło, masa gwiazdy oraz praca, c to prędkość światła w próżni oraz $\boldsymbol{\Delta M} \equiv \boldsymbol{M}_{\mathbf{final}} - \boldsymbol{M}_{\mathbf{initial}}$.

Następnie zakładamy, że $\boldsymbol{T_0}$ jest stałe, podczas gdy $\boldsymbol{T_R} \equiv \boldsymbol{T}$ zmienia się.

b. Oblicz pojemność cieplną gwiazdy w stałej objętości C_V jako funkcji M oraz pojemność cieplną przy stałym ciśnieniu C_P wyrażoną poprzez C_V oraz T

Podpowiedź: dla małych x można przyjąć, że $(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}} \approx \boldsymbol{1} + \boldsymbol{nx}$

Zakładając, że C_V jest stałe oraz że gaz przechodzi proces izobaryczny, więc gwiazda produkuje ciepło i wypromieniowuje je w przestrzeń.

c. Wyznacz ciepło produkowane przez proces izobaryczny jeśli temperatura początkowa i końcowa wynoszą odpowiednio T_i oraz T_f

d. *Tego podpunktu nie ma, ale następny podpunkt nazywa się e (wiadomość od liderów)*

W następnych podpunktach możesz przyjąć, że rozważana gwiazda to Słońce

e. Jeśli przyjąć że światło słoneczne jest monochromatyczne o częstości $\mathbf{5} \times \mathbf{10^{14}}$ Hz oszacuj liczbę fotonów emitowanych przez Słońce w ciągu sekundy.

f. Oblicz pojemność cieplną C_V dla Słońca przyjmując, że jego temperatura na powierzchni zmienia się od 5500K do 6000K w ciągu jednej sekundy.