

2. DYSKUSJA BŁĘDÓW POMIAROWYCH

2.1. ŹRÓDŁA I PODZIAŁ BŁĘDÓW

Pomiarem nazywamy czynności związane z ustaleniem wartości liczbowej miary (por. § 1.1) danej wielkości fizycznej. Pomiary wykonujemy za pomocą *narzędzi pomiarowych*, na które składają się wzorce miar (odważniki, przymiar, pojemniki itp.) oraz przyrządy pomiarowe (waga, mierniki elektryczne itp.). *Przyrządy pomiarowe* podzielić możemy na: bezpośrednie, pozwalające odczytywać bezpośrednio miarę wielkości fizycznej (np. suwmiarka, sekundomierz, omomierz itp.) oraz pośrednie (np. cyrkiel, opornik wzorcowy itp.), które nie dają wprawdzie bezpośrednio miary wielkości fizycznej, lecz pomiar umożliwiają. Ze względu na sposób pomiaru, wielkości fizyczne podzielić możemy na: proste i złożone. Miarę *wielkości prostej* otrzymujemy w wyniku bezpośredniego pomiaru wykonanego za pomocą jednego przyrządu pomiarowego. Celem uzyskania miary *wielkości złożonej* musimy wykonać równoczesny pomiar kilku wielkości prostych, stosując nieraz bardzo złożoną aparaturę pomiarową. Samą miarę wielkości złożonej obliczamy wtedy z wzoru fizycznego.

Otrzymana w wyniku pomiaru miara wielkości fizycznej x różni się od prawdziwej miary x_0 . Różnicę $x - x_0 = \delta$ nazywamy *rzeczywistym błędem bezwzględnym* wielkości mierzonej. Ze względu na źródła, błędy podzielić możemy na błędy przyrządu pomiarowego, błędy metody pomiarowej (wynikające np. z przybliżonego charakteru wzoru), błędy powodowane niedokładnością zmysłów lub wreszcie statystycznym charakterem zjawiska. Ze względu na sposób w jaki błędy wpływają na wynik pomiaru dzielimy je na trzy następujące grupy: systematyczne, przypadkowe i grube.

a. Błędy systematyczne. Zawsze w ten sam sposób wpływają na wyniki pomiarów wykonanych za pomocą tej samej metody i aparatury pomiarowej. Przy zmianie warunków pomiaru według określonej prawidłowości, błąd systematyczny zachowuje stałą wartość lub zmienia się w sposób prawidłowy. Wiele różnorodnych przyczyn może spowodować powstanie błędu systematycznego.

Minimalna wartość błędu systematycznego jest określona *dokładnością* stosowanego przyrządu (lub jego klasą w przypadku mierników elektrycznych, por. § 18.03). Przyrządy skonstruowane są w ten sposób, by wyniki prawidłowo wykonanych pomiarów różniły się od wartości prawdziwej x_0 nie więcej niż o wartość najmniejszej działki skali lub ułamek tej działki określony klasą przyrządu. Wartość najmniejszej działki, czyli odległość między sąsiednimi kreskami na skali przyrządu lub ułamek tej odległości określony klasą przyrządu nazywać będziemy *dokładnością odczytu* i oznaczać symbolem Δx . Wartość prawdziwa x_0 może być większa albo mniejsza od wartości odczytanej x , stąd dokładność odczytu może być dodatnia lub ujemna $\pm \Delta x$.

P r z y k ł a d. Za pomocą miarki, na której zaznaczono każdy centymetr, zmierzono długość l przedmiotu, otrzymując wartość $l = 78$ cm. W tym przypadku dokładność odczytu wynosi $\Delta l = \pm 1$ cm; ($|\Delta l| = 1$ cm). Zatem rzeczywista długość przedmiotu mieści się w granicach od $l_1 = 77$ do $l_2 = 79$ cm, co możemy zapisać w postaci $l = (78 \pm 1)$ cm.

Innym źródłem błędu systematycznego jest błąd skali przyrządu, spowodowany trwałym jego uszkodzeniem lub wadliwym wykonaniem. Do tej grupy zaliczymy również błędy wynikające z niewłaściwego sposobu wykorzystania przyrządów, np. złego ustawienia, niewłaściwej temperatury otoczenia, wilgotności itp. Celem wyeliminowania

błędów tego typu należy przyrządy wykorzystywać w sposób zgodny z instrukcją i co pewien czas kontrolować, to znaczy porównywać ich wskazania ze wskazaniami wzorców pewniejszych*.

Przyczyną błędu systematycznego może być *zła metoda pomiaru*. Jeżeli np. mierząc wydłużenie drutu, odczytujemy położenie obciążonego końca przyjmując, że drugi, zamocowany koniec nie zmienia swego położenia, to wynik pomiaru, poza właściwym wydłużeniem, zawiera przyczynek pochodzący od ugięcia zawieszenia. Błąd taki można wyeliminować przez ulepszenie sposobu pomiaru.

Pewna grupa błędów systematycznych wynika z *przybliżonego charakteru wzorów* stosowanych do obliczenia wielkości złożonej. Tego typu błąd popełniamy obliczając przyspieszenie ziemskie z wzoru $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ wtedy, gdy pomiar okresu wykonaliśmy przy dużej amplitudzie wahań. (Wzór na okres jest wyprowadzony przy założeniu małych kątów wychYLENIA.)

Błąd systematyczny może być wprowadzony również *przez samego eksperymentatora* (np. błąd paralaksy, por. § 18.03). Ostatnio ten rodzaj błędów coraz częściej eliminuje się przez zastosowanie automatycznego zapisu wyników za pomocą przyrządów rejestrujących np. pisaków itp.

Błędy systematyczne można zmniejszać nieograniczenie udoskonalając metodę pomiaru lub stosowane przyrządy, przez zastosowanie dokładniejszych wzorów, lub wreszcie przez wyeliminowanie błędów popełnianych przez eksperymentatora.

b. Błędy przypadkowe. Załóżmy, że pomiar wykonujemy wielokrotnie, za pomocą przyrządu, którego dokładność jest bardzo duża, a więc błąd systematyczny mały. W takim przypadku może się zdarzyć, że różnice między wynikami kolejnych pomiarów będą znacznie przewyższać błąd systematyczny. Błąd, którym obarczony jest każdy z pomiarów, nazywamy błędem przypadkowym. Wiele różnorodnych przyczyn może spowodować powstanie błędu przypadkowego. Może on wynikać z *własności przedmiotu mierzonego*, np. przy pomiarze średnicy drutu wynikać może z wahań średnicy. Innym jego źródłem są *własności samego przyrządu* pomiarowego, którego wskazania zależą od przypadkowych drgań budynku, ruchów powietrza, tarcia w łożyskach, docisku (np. mikromierza) itp. Błędy przypadkowe mogą mieć za przyczynę również podłoże *fizjologiczne* np. zjawisko spostrzeżenia chwili włączenia sekundomierza, określenia równości oświetlenia poszczególnych części pola widzenia lub usłyszenia ekstremum natężenia dźwięku itp. Błędów przypadkowych nie można wyeliminować, lecz ich wpływ na wynik ostateczny można ściśle określić. Będzie to przedmiotem następnych paragrafów.

c. Błędy grube lub pomyłki wynikają z niestaranności eksperymentatora. Celem wyeliminowania takich błędów należy powtórzyć pomiary. Ponieważ błędy grube są do uniknięcia, wyeliminujemy je z dalszych rozważań.

d. Ze względu na sposób zapisu rozróżniamy błędy bezwzględne, względne i procentowe.

Błędem bezwzględnym nazywamy odchylenie wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej wyrażone w takich jednostkach jak wielkość mierzona. Błąd bezwzględny nie oddaje sam w pełni wartości wykonanego pomiaru. Jeżeli np. wiemy, że błąd bezwzględ-

* Kontrolowaniem przyrządów stosowanych w przemyśle i handlu zajmuje się Centralny Urząd Jakości i Miar.

ny wynosił $\Delta l = \pm 1$ cm, to wartość wykonanego pomiaru ocenić możemy tylko wtedy, gdy znamy bezpośredni odczyt l . Błąd $\Delta l = \pm 1$ cm jest bardzo duży wtedy, gdy $l = 5$ cm, a bardzo mały wtedy, gdy $l = 5$ km. Stąd też musimy zawsze obok wartości otrzymanej z pomiaru zapisać błąd

$$l \pm \Delta l = (102 \pm 1) \text{ cm.} \quad (2.1)$$

Tak zapisany rezultat nazywać będziemy *wynikiem pomiaru*. Podkreślić tu należy, że rezultat pomiaru bez oceny dokładności jest bezwartościowy.

Błędem względnym nazywamy stosunek błędu bezwzględnego do wielkości mierzonej $\left| \frac{\Delta l}{l} \right|$. Jest on wielkością niemianowaną. Błąd względny wyrażony w procentach nazywamy *błędem procentowym* $B_p = \left| \frac{\Delta l}{l} \right| 100\%$. W ten sposób zdefiniowany błąd procentowy nie zawiera żadnych informacji na temat samego wyniku lub błędu bezwzględnego. Pełną informację o wartości wykonanego pomiaru dają łącznie: wynik pomiaru i błąd bezwzględny lub procentowy. Stąd podając bezpośrednio rezultaty pomiaru w pracowni, należy podać zarówno wynik pomiaru jak i błąd procentowy. Tak więc w cytowanym przypadku równanie (2.1) napiszemy w postaci

$$l = (102 \pm 1) \text{ cm, } B_p = 1\%. \quad (2.2)$$

2.2. TEORIA BŁĘDÓW PRZYPADKOWYCH WEDŁUG GAUSSA; ODCHYLENIE STANDARDOWE

W obecnych rozważaniach ograniczymy się do przypadku pomiarów, w których błąd systematyczny możemy pominąć w porównaniu z błędem przypadkowym. Dla przykładu w tabeli 2.1 przedstawiono wyniki dużej liczby pomiarów wykonanych z tą samą dokładnością. Wyniki te uporządkowano według rosnących wartości i przedstawiono graficznie na rys. 2.1. Zauważymy, że bardzo rzadko pojawiają się wartości małe i duże, natomiast najczęściej występują wartości pośrednie.

Przedstawiony tu przykład posłuży nam do sformułowania podstawowych założeń teorii błędów przypadkowych. Nasze obecne rozważania dotyczyć będą przypadku, gdy całkowita liczba pomiarów $n \rightarrow \infty$ i wyniki w sposób ciągły pokrywają całą oś odciętych. (W każdej rzeczywistej serii pomiarów możliwe są tylko wyniki, których wartość liczbowa miary jest równa całkowitej liczbie działek przyrządu pomiarowego.)

Różnicę między wynikiem i -tego pomiaru i wartością rzeczywistą, zwaną błędem rzeczywistym, oznaczmy przez δ_i

$$\delta_i = x_i - x_0. \quad (2.3)$$

Oznaczając ponadto przez n_i liczbę pomiarów, dla których uzyskano ten sam wynik x_i , prawdopodobieństwo $P(\delta_i)$ uzyskania wyniku x_i wyrazimy wzorem:

$$P(\delta_i) = \frac{n_i}{n} \quad \text{lub} \quad P(\delta_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}.$$

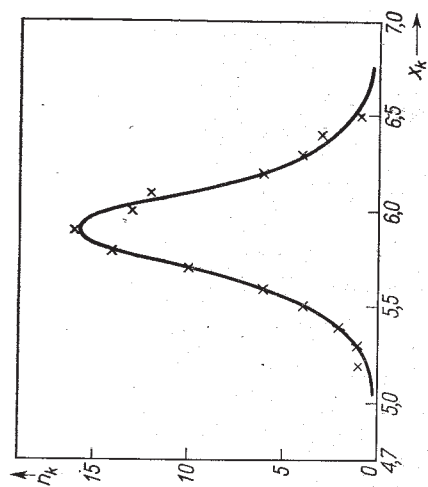
Ponadto muszą być spełnione związki:

$$\sum_{i=1}^n n_i = n, \quad \text{skąd} \quad \sum_{i=1}^n P(\delta_i) = 1.$$

n_k	n_k/n	x_k	$n_k x_k$	ε_k^2	$n_k \varepsilon_k^2$
1	0,011	5,2	5,2	0,49	0,49
1	0,011	5,3	5,3	0,36	0,36
2	0,021	5,4	10,8	0,25	0,50
4	0,043	5,5	22,0	0,16	0,64
7	0,075	5,6	39,2	0,09	0,63
10	0,094	5,7	57,0	0,04	0,40
14	0,149	5,8	81,2	0,01	0,14
16	0,170	5,9	94,4	0,00	0,00
13	0,138	6,0	78,0	0,01	0,13
12	0,128	6,1	73,2	0,04	0,48
6	0,064	6,2	37,2	0,09	0,54
4	0,043	6,3	25,2	0,16	0,64
3	0,032	6,4	19,2	0,25	0,75
1	0,011	6,5	6,5	0,36	0,36
$94 = n$			$554,4 = \sum_k n_k x_k$	$6,06 = \sum_k n_k \varepsilon_k^2$	

Wynik końcowy: $\bar{x} = 5,899$, $S_{\bar{x}} = 0,026$, $x = 5,90 \pm 0,03$

* Do obliczeń ε_x przyjęto $x = 5,9$.



2.1. Graficzne przedstawienie wyników z tabeli 2.1.

Zakładając, że błąd δ_i jest zmienną ciągłą, wprowadzimy różniczkę $d\delta \rightarrow \lim \Delta\delta$, przy czym kolejne wartości $\Delta\delta$ są rozłączne i pokrywają cały przedział zmienności δ_i . Ponadto wprowadzimy pojęcie gęstości prawdopodobieństwa błędu przypadkowego

$$P(\delta) = \lim_{\Delta\delta \rightarrow 0} \frac{P(\delta)}{\Delta\delta},$$

wtedy

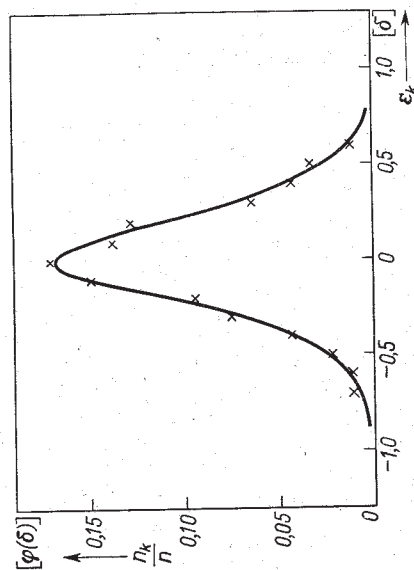
$$P(\delta) = \varphi(\delta) \delta \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta) d\delta = 1. \quad (2.5)$$

obecnie, postaramy się odgadnąć postać matematyczną funkcji $\varphi(\delta)$, opisującej rozkład błędów przypadkowych bardzo dużej serii pomiarów. Zgodnie z rys. 2.2 funkcja taka spełniać musi następujące warunki:

$\varphi(\delta) \geq 0$; $\varphi(+\delta) = \varphi(-\delta)$; $\varphi(\delta_1) > \varphi(\delta_2)$, gdy $|\delta_1| < |\delta_2|$; $\max \varphi(\delta) = \varphi(0)$; $\min \varphi(\delta) = \varphi(\pm \infty)$; dla dużych δ funkcja $\varphi(\delta)$ musi asymptotycznie zbliżać się do zera. Warunki powyższe dobrze spełnia funkcja

$$\varphi(\delta) = C \exp(-h^2 \delta^2) \quad \text{dla} \quad C > 0.$$



2.2. Przedstawienie wyników tabeli 2.1 w układzie: względna liczba pomiarów n_k/n w zależności od odchylenia od wartości średniej ε_k . Na wykresie zaznaczono w nawiasach oznaczenia odpowiadające krzywej Gaussa.

Stałą C wyznaczyć można korzystając z następującej własności przyjętej funkcji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}. \quad (2.6)$$

Ponieważ zgodnie z (2.5) musi zachodzić

$$C \exp(-h^2 \delta^2) d\delta = 1, \quad \text{otrzymamy} \quad C = h/\sqrt{\pi},$$

$$\text{czyli} \quad \varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 \delta^2) \quad \text{dla} \quad h > 0. \quad (2.7)$$

Funkcję (2.7) nazywamy funkcją Gaussa lub Gaussa prawem błędów, parametr h — miarą precyzji wykonanych pomiarów. Obraz graficzny funkcji Gaussa przedstawiono na rysunku 2.3.

Można udowodnić, że błędy pomiaru stosują się do funkcji Gaussa również wtedy, gdy prawdziwą wartość x_0 zastąpimy średnią arytmetyczną $\bar{x}$. Wprowadzając do wzoru (2.7) odchylenia od średniej arytmetycznej:

$$\varepsilon_i \equiv x_i - \bar{x}$$

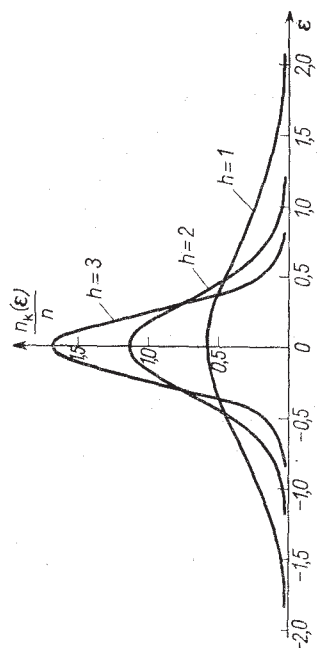
$$(2.8)$$

zysujemy

$$\varphi(x_i - \bar{x}) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp[-h^2(x_i - \bar{x})^2]. \quad (2.9)$$

rodnie z wzorem (2.4), prawdopodobieństwo otrzymania wartości x_i wyraża się wzorem:

$$P(x_i) = \varphi(x_i - \bar{x}) dx_i.$$



2.3. Krzywa Gaussa dla różnych wartości miary precyzji h .

godnie z teorią prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo $L(x)$ otrzymania w n pomiarach wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ wynosi

$$L(x) = \prod_{i=1}^n \varphi(x_i - \bar{x}) dx_i. \quad (2.10)$$

Wartość $\bar{x}$ jest wartością najbardziej prawdopodobną, stąd dla $L(x)$ funkcja (2.10) musi przyjmować maksimum. Podstawiając wyrażenie (2.9) do (2.10) otrzymujemy

$$L(x) = \frac{h^n}{\sqrt{\pi}^n} \prod_{i=1}^n dx_i \prod_{i=1}^n \exp[-h^2(x_i - \bar{x})^2],$$

skąd

$$L(x) = \frac{h^n}{\sqrt{\pi}^n} \exp\left[-h^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] \prod_{i=1}^n dx_i.$$

Przy $\prod_{i=1}^n dx_i = \text{const}$, jeżeli wyrażenie powyższe osiąga maksimum

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \text{minimum}. \quad (2.11)$$

Wynik ten, zwany postulatem Gaussa, jest punktem wyjścia przy ustalaniu błędów pomiarowych.

Z postulatu Gaussa wynika również, że wielkość $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną. Warunkiem istnienia minimum funkcji (2.11) jest zerowanie pierwszej pochodnej $f'(x) = 0$, skąd $2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ i dalej $n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$,

czyli

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.12)$$

Tak więc udowodniliśmy, że wychodząc z postulatu Gaussa, na wynik końcowy, dużej serii pomiarów przyjęcie średniej arytmetycznej (2.12). Metoda obliczeń oparta na postulacie Gaussa nazywa się metodą wyrównawczą, lub metodą najmniejszych kwadratów.

Odczyleniem standardowym lub błędem średnim kwadratowym S_x dowolnego pomiaru x_i serii składającej się z bardzo dużej liczby pomiarów o jednakowej dokładności nazywamy pierwiastek z średniej arytmetycznej kwadratów błędów bezwzględnych δ_i :

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2}. \quad (2.13)$$

Ponieważ nie znamy rzeczywistych błędów δ_i , błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej musimy wyrazić przez odchylenia od wartości średniej ε_i zdefiniowane wzorem (2.8). Udowodnimy, że w takim przypadku odchylenie standardowe wyraża się wzorem:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}. \quad (2.14)$$

Sumując wyrażenia definicyjne (2.3) dla wszystkich wskaźników i otrzymamy

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n x_i - nx_0,$$

skąd

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

Uwzględniając definicję średniej arytmetycznej (2.12) otrzymamy

$$x_0 = \bar{x} - \bar{\delta}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie we wzorze (2.3) definiującym błąd rzeczywisty i uwzględniając wzór (2.8) otrzymamy

$$\varepsilon_i = \delta_i - \bar{\delta}.$$

Podnosząc powyższe wyrażenie do kwadratu, sumując po i oraz dzieląc przez n otrzymamy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \bar{\delta}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \frac{2}{n} \bar{\delta} \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

Po uwzględnieniu definicji średniej arytmetycznej wyrażenie przyjmie postać

$$\bar{\varepsilon}_i^2 = \bar{\delta}^2 + \bar{\delta}^2 - 2\bar{\delta}^2.$$

Celem znalezienia związku między kwadratem średniej $\bar{\delta}^2$ i średnią kwadratów $\bar{\delta}^2$ zauważymy, że

$$\bar{\delta}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n (\delta_1 \delta_i + \delta_2 \delta_i + \dots) \right] = \frac{1}{n} \bar{\delta}^2$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{n-1}{n} \bar{\delta}^2$$

lub rozpiskując wartości średnie

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2.$$

Podstawiając powyższy związek do wzoru (2.13) otrzymamy (2.14) c.n.d.

W praktyce obliczanie błędów ściśle według wzoru (2.14) jest bardzo kłopotliwe, ponieważ x musimy obliczyć z dokładnością przewyższającą dokładność pomiaru x_i . Dowodzi się, że przy obliczaniu odchylenia standardowego według wzoru (2.14) można przyjąć na x wartość zaokrągloną do tego miejsca znaczącego, do którego są podane wyniki x_i . Zaokrąglenia takie zastosowano w przykładowych obliczeniach przedstawionych w tabelkach 2.1 i 2.2.

Tabela 2.2

Opracowanie serii małej liczby pomiarów wielkości prostej

i (l. p.)	x_i	ε_i^*	ε_i^2
1	35,6	-0,1	0,01
2	35,8	0,1	0,01
3	35,7	0,0	0,00
4	35,5	-0,2	0,04
5	35,6	-0,1	0,01
6	35,9	0,2	0,04
7	35,7	0,0	0,00
8	35,8	0,1	0,01
9	35,9	0,2	0,04
$\sum_{i=1}^n x_i = 321,5$			$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 0,16$

Wynik końcowy: $\bar{x} = 35,72$ mm, $S_{\bar{x}} = 0,05$ mm, $\bar{x} = (35,72 \pm 0,05)$ mm.

* Do obliczania ε_i przyjęto zaokrąglenie $x = 35,7$ mm.

3. WARTOŚĆ ŚREDNIA I ODCHYLENIE STANDARDOWE WIELKOŚCI ZŁOŻONEJ I ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Załóżmy, że interesująca nas wielkość $z = f(x, y)$ jest funkcją złożoną dwóch wielkości prostych x oraz y , które mierzyliśmy wielokrotnie uzyskując w wyniku końcowym wartości x_i , gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, n$, oraz y_k , gdzie $k = 1, 2, 3, \dots, m$. Wielkości te wyniku końcowym dają wartości średnie

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{oraz} \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k. \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}, \quad \text{oraz} \quad \nu_k = y_k - \bar{y}, \quad (2.16)$$

jak również odchylenia standardowe S_x oraz S_y . Wielkość złożoną z_{ik} obliczyć możemy oddzielnie dla każdej pary wielkości prostych x_i oraz y_k :

$$z_{ik} = f(x_i, y_k).$$

Korzystając z definicji odchylen (2.16) możemy napisać

$$z_{ik} = f(\bar{x} + \varepsilon_i, \bar{y} + \nu_k). \quad (2.17)$$

Rozwijając powyższe wyrażenie w szereg Taylora i ograniczając rozwinięcie do pierwszych dwóch wyrazów otrzymamy

$$z_{ik} = f(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon_i f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + \nu_k f'_y(\bar{x}, \bar{y}) + \dots,$$

gdzie $f'_x(\bar{x}, \bar{y})$ oznacza pierwszą pochodną cząstkową funkcji (2.17) względem x_i w punkcie $\bar{x}, \bar{y}$, a $f'_y(\bar{x}, \bar{y})$ odpowiednią pochodną względem y_k . Zgodnie z definicją średniej arytmetycznej $\bar{z}$ możemy napisać

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m z_{ik}, \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [f(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon_i f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + \nu_k f'_y(\bar{x}, \bar{y})], \\ &= \frac{1}{nm} \left[nm f(\bar{x}, \bar{y}) + m \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + n \sum_{k=1}^m \nu_k f'_y(\bar{x}, \bar{y}) \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ zgodnie z definicją wartości średniej $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$ oraz $\sum_{k=1}^m \nu_k = 0$ otrzymamy:

$$\bar{z} \text{ at } \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m z_{ik} \simeq f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Wynika stąd, że podstawiając do wzoru na wielkość złożoną wartości średnie wielkości prostych, w wyniku końcowym otrzymamy średnią arytmetyczną wielkości złożonej.

Obecnie wyprowadzimy wzór na odchylenie standardowe wielkości $\bar{z}$. Oznaczmy przez z_0 wartość rzeczywistą wielkości z , a przez w_{ik} odchylenie wielkości z_{ik} od wartości rzeczywistej

$$w_{ik} = z_{ik} - z_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.18)$$

Odchylenia poszczególnych wielkości prostych wynoszą odpowiednio

$$\delta_i = x_i - x_0 \quad \text{oraz} \quad \zeta_k = y_k - y_0$$

i wielkość z_{ik} możemy napisać w postaci:

$$z_{ik} = f(x_i, y_k) = f(x_0 + \delta_i, y_0 + \zeta_k).$$

Rozwijając powyższe wyrażenie na szereg Taylora otrzymamy

$$z_{ik} = f(x_0, y_0) + \delta_i f'_x(x_0, y_0) + \zeta_k f'_y(x_0, y_0).$$

Założymy, że $f(x_0, y_0) = z_0$. Przenosząc z_0 na stronę lewą i uwzględniając (2.18) otrzymamy

$$w_{ik} = \delta_i f'_x(x_0, y_0) + \zeta_k f'_y(x_0, y_0).$$

Zgodnie z definicją odchylenia standardowego (błędu średniego kwadratowego) (2.13) otrzymamy

$$S_z^2 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m w_{ik}^2,$$

$$S_z^2 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [\delta_i f'_x(x_0, y_0) + \zeta_k f'_y(x_0, y_0)]^2,$$

$$S_z^2 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [\delta_i^2 f_x'^2(x_0, y_0) + \zeta_k^2 f_y'^2(x_0, y_0) + 2\delta_i \zeta_k f'_x(x_0, y_0) f'_y(x_0, y_0)].$$

Trzeci składnik ostatniej sumy zawiera iloczyn dwóch małych wielkości $\delta_i \zeta_k$ i możemy go zaniedbać. Wykonując ponadto sumowanie otrzymamy

$$S_z^2 = f_x'^2(x_0, y_0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 + f_y'^2(x_0, y_0) \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \zeta_k^2.$$

Zgodnie z definicją odchylen standardowych wielkości prostych mamy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = S_x^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \zeta_k^2 = S_y^2$$

i ostatni wzór przyjmie postać

$$S_z^2 = S_x^2 f_x'^2(x_0, y_0) + S_y^2 f_y'^2(x_0, y_0).$$

Zastępując wartości rzeczywiste $f(x_0, y_0)$ wyrażeniami otrzymanymi dla wartości średnich $f(\bar{x}, \bar{y})$ otrzymamy

$$S_z = \sqrt{S_x^2 f_x'^2(\bar{x}, \bar{y}) + S_y^2 f_y'^2(\bar{x}, \bar{y})}.$$

Wyrażenie powyższe można uogólnić na funkcje dowolnej liczby zmiennych x_i otrzymując

$$S_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_{x_i}^2 \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right]^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.19)$$

Odchylenie standardowe, czyli błąd średni kwadratowy *średniej arytmetycznej* pojedynczego pomiaru jest miarą błędu każdego z pomiarów wielkości prostej, wchodzących w skład serii. Obecnie odpowiemy na pytanie jakim błędem obarczona jest średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_k + \dots + x_n).$$

W tym celu do powyższej średniej zastosujemy wzór (2.19), który pozwoli nam obliczyć jej odchylenie standardowe. Pochodna wartości średniej $\bar{x}$ traktowanej jako funkcja złożona $f(x_k)$ wielkości x_k , względem zmiennej x_k wynosi

$$f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n},$$

natomiast błąd tej zmiennej

$$S_{x_k} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}.$$

Obydwa wyrażenia nie zależą od zmiennej x_k . Po podstawieniu do wzoru (2.19) otrzymamy

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}.$$

Wykonując sumowanie po k otrzymamy ostatecznie

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}. \quad (2.20)$$

Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej wielkości złożonej otrzymamy podstawiając do wzoru (2.19) błąd S_{x_i} zamiast odchylenia standardowego S_{x_i}

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_{x_i}^2 \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right]^2}. \quad (2.21)$$

Szczególnie prostym wzorem wyraża się odchylenie standardowe wielkości złożonej obliczanej ze wzoru

$$z = \prod_{i=1}^n A x_i^{a_i},$$

gdzie A oraz a_i są dowolnymi liczbami. Tak więc z jest iloczynem dowolnych potęg wielkości prostych. W takim przypadku

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = a_i \frac{z}{x_i}.$$

Podstawiając powyższą wielkość do wzoru (2.21) i dzieląc przez z otrzymamy

$$\frac{S_{\bar{z}}}{z} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[a_i \frac{S_{x_i}}{x_i} \right]^2}. \quad (2.22)$$

P r z y k ł a d: Celem doświadczenia jest wyznaczenie gęstości czaszy kulistej. Zmierzone jej promień podstawy otrzymując wynik $r = 1,3678$ cm oraz strzałkę — wysokość $s = 0,6359$ cm i w wyniku ważenia na wadze analitycznej ustalono masę $m = 9,23638$ g. Postępując w sposób omawiany w § 2.2

(tab. 2.2) uzyskano następujące wartości odchyłeń standardowych średniej arytmetycznej: $S_{\bar{r}} = 0,0001 \text{ cm}$, $S_{\bar{s}} = 0,0002 \text{ cm}$ oraz $S_{\bar{m}} = 0,00006 \text{ g}$. Obliczyć średnią gęstość czaszy d oraz błąd, odchylenie standardowe średniej arytmetycznej $S_{\bar{d}}$. Gęstość obliczamy w tym przypadku ze wzoru

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3}.$$

Po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń otrzymano $d = 4,61036 \text{ g cm}^{-3}$. Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej, zgodnie z (2.21), wyrazi się wzorem:

$$S_{\bar{d}}^2 = \left[\frac{S_{\bar{m}}}{\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3} \right]^2 + \left[\frac{\frac{1}{2}\pi m(r^2 + s^2)}{\left(\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3\right)^2} \cdot S_{\bar{s}} \right]^2 + \left[\frac{\pi m r s S_{\bar{r}}}{\left(\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3\right)^2} \right]^2.$$

Podstawiając do powyższego wzoru wartości liczbowe i wykonując obliczenia otrzymamy

$$S_{\bar{d}}^2 = 0,499^2(6 \cdot 10^{-5})^2 + 8,22^2(2 \cdot 10^{-4})^2 + 6,29^2(10^{-4})^2$$

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{0,05 + 270 + 39,5} \cdot 10^{-4} = \sqrt{310} \cdot 10^{-4} = 18 \cdot 10^{-4} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Wynik ostateczny przyjmie postać $d = (4,6104 \pm 0,0018) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, a błąd procentowy wynosi 0,04%.

2.4. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA BŁĘDÓW

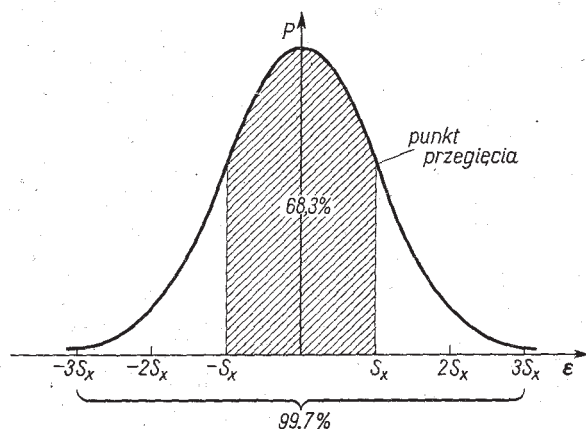
W dotychczasowych rozważaniach wprowadziliśmy niezależnie miarę precyzji h i odchylenie standardowe S_x . Granicę, do której dąży odchylenie standardowe S_x przy $n \rightarrow \infty$, oznaczamy przez σ ;

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_x.$$

Można udowodnić, że zachodzi następujący związek:

$$\sigma = (h\sqrt{2})^{-1}. \quad (2.23)$$

Dowodzi się również, że odcięta punktu przegięcia krzywej Gaussa δ_p jest równa σ (por. rys. 2.4).



2.4. Interpretacja graficzna odchylenia standardowego.

Zakładając, że gęstość prawdopodobieństwa wyraża się funkcją Gaussa (2.7), prawdopodobieństwo $P_{\Delta x}$, że wynik jest zawarty w granicach od $\bar{x} - \Delta x$ do $\bar{x} + \Delta x$ wynosi

$$P_{\Delta x} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \exp(-h^2 \varepsilon^2) d\varepsilon.$$

Podstawiając $\xi = h\varepsilon$ oraz zmieniając granice całkowania, równanie powyższe możemy przedstawić w postaci

$$P_{\Delta x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\Delta x} \exp(-\xi^2) d\xi.$$

Wielkość

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi$$

nazywamy funkcją błędu Gaussa. Wartości tej funkcji są tabelaryzowane. Prawdopodobieństwo $P_{\Delta x}$ wyrazimy więc wzorem:

$$P_x = \Phi(h\Delta x).$$

Zgodnie z (2.23) dla dostatecznie dużej serii pomiarów możemy przyjąć przybliżenie

$$S_x = (h\sqrt{2})^{-1}. \quad (2.23a)$$

Znając funkcję Gaussa możemy określić kolejne prawdopodobieństwa tego, że wynik nasz mieści się w przedziale $\bar{x} \pm \Delta x$, przy Δx wynoszącym kolejno S_x , $2S_x$, $3S_x$:

Δx	$P_{\Delta x}$	Poziom ufności α
S_x	$\Phi(1/\sqrt{2}) = \Phi(0,707) = 0,683$	68,3
$2S_x$	$\Phi(2/\sqrt{2}) = \Phi(1,414) = 0,954$	95,4
$3S_x$	$\Phi(3/\sqrt{2}) = \Phi(2,121) = 0,997$	99,7

Wyrażoną w procentach ilość wyników mieszczących się w danym przedziale $\bar{x} \pm \Delta x$ nazywamy *poziomą ufnością* α , a przedział, w którym mieści się wtedy wielkość mierzona z danym prawdopodobieństwem, nazywamy przedziałem ufności ($\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x$). Błąd równy $3S_x$ (trzykrotne odchylenie standardowe) nazywamy *błędem maksymalnym*.

Poza błędami średnim kwadratowym i maksymalnym niekiedy posługujemy się jeszcze pojęciem *błędu przeciętnego*

$$S_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\delta_i|.$$

Można udowodnić, że dla bardzo dużej serii pomiarów, między błędem przeciętnym i miarą precyzji h istnieje związek

$$S_p = (h\sqrt{\pi})^{-1}.$$

Dzieląc stronami przez ostatnie równanie wyrażenie (2.23a) otrzymamy

$$\frac{S_x}{S_p} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (2.24)$$

Spełnienie powyższego związku można uważać za kryterium stosowności prawa Gaussa dla danej serii pomiarów.

2.5. METODA STUDENTA-FISHERA OKREŚLANIA BŁĘDÓW MAŁEJ SERII POMIARÓW

Do tej pory omawialiśmy błędy bardzo dużej liczby pomiarów ($n \rightarrow \infty$). W praktyce najczęściej wykonujemy tylko kilka pomiarów ($n < 5$). Oznacza to, że ze zbioru teoretycznego, składającego się z nieskończonego wielu punktów wybieramy tzw. próbkę składającą się z kilku przypadkowo wybranych pomiarów. Dla tej próbki obliczamy wartość średnią $\bar{x}$, odchylenie standardowe S'_x oraz odchylenie standardowe średniej S'_x . Jest rzeczą oczywistą, że prawdopodobieństwo znalezienia wartości rzeczywistej w przedziale $(\bar{x} \pm S'_x)$ jest znacznie mniejsze, niż w przypadku, gdy wartość średnia $\bar{x}$ i błąd S'_x obliczone są na podstawie bardzo dużej liczby pomiarów. W metodzie Studenta-Fishera pytamy, na ile należy rozszerzyć przedział $(\bar{x}' \pm S'_x)$ określony dla próbki, by prawdopodobieństwo znalezienia wartości rzeczywistej w rozszerzonym przedziale było równe prawdopodobieństwu znalezienia wartości rzeczywistej w przedziale $(\bar{x} \pm S'_x)$, określonym przez odchylenie standardowe obliczone dla bardzo dużej liczby pomiarów. Rozszerzony przedział napiszemy w postaci $(\bar{x}' \pm t_{na} S'_x)$. Wartość współczynnika t_{na} zwanego współczynnikiem Studenta-Fishera zależy od liczby n pomiarów wchodzących w skład próbki i od postulowanego poziomu ufności α . Korzystając z wyników teorii Studenta-Fishera, obliczyć można teoretyczne wartości współczynników t_{na} . W tablicy 2.3 zebrano współczynniki t_{na} zaokrąglone do dwóch miejsc znaczących, ponieważ taka dokładność wystarcza całkowicie do przypadków, spotykanych w pracowni.

W tablicy podano współczynniki, przez które należy pomnożyć odchylenie standardowe, aby otrzymać błąd dla danego poziomu ufności α . Chcąc uzyskać błąd średni kwadratowy przyjmujemy poziom ufności $\alpha = 0,68 \approx 0,7$, poziomowi ufności $\alpha = 0,5$ odpowiada tzw. *błąd prawdopodobny*, a poziomowi $\alpha = 0,999$ — trzykrotne odchylenie standardowe — czyli błąd maksymalny. W pracowni z reguły obliczać będziemy odchylenia standardowe biorąc poziom ufności $\alpha = 0,7$, a tylko w nielicznych przypadkach błąd maksymalny przy $\alpha = 0,999$. Celem uzyskania błędu maksymalnego wystarczy pomnożyć odchylenie standardowe S'_x przez odpowiedni współczynnik Studenta-Fishera, nie trzeba mnożyć najpierw S'_x przez 3, czyli $S_{na} = t_{na} S'_x$, przy $\alpha = \text{const}$.

Zaniedbując poprawki Studenta-Fishera dla niewielkiej liczby pomiarów, popełniamy błąd $\Delta x_n \approx (t_{0\alpha} - t_{na}) S'_x$. Wynikający stąd błąd względny φ jest zdefiniowany wzorem:

$$\varphi = \frac{\Delta x_n}{t_{0\alpha} S'_x} = \frac{t_{0\alpha} - t_{na}}{t_{0\alpha}}.$$

Korzystając z tablicy współczynników Studenta-Fishera możemy określić minimalną liczbę pomiarów, które musimy wykonać, by na skutek pomiarów współczynników

Tablica 2.3

Współczynniki Studenta-Fishera w zależności od liczby pomiarów n i poziomu ufności α

n	α	0,5	0,7	0,95	0,999
2		1,00	2,0	12,7	636,6
3		0,82	1,3	4,3	31,6
4		0,77	1,3	3,2	12,9
5		0,74	1,2	2,8	8,6
6		0,73	1,2	2,6	6,9
7		0,72	1,1	2,4	6,0
8		0,71	1,1	2,4	5,4
9		0,71	1,1	2,3	5,0
10		0,70	1,1	2,3	4,8
12		0,70	1,1	2,2	4,6
14		0,69	1,1	2,2	4,1
16		0,69	1,1	2,1	4,0
18		0,69	1,1	2,1	4,0
20		0,69	1,1	2,1	3,9
22		0,69	1,1	2,1	3,8
24		0,68	1,1	2,1	3,8
26		0,68	1,1	2,1	3,7
28		0,68	1,1	2,0	3,7
30		0,68	1,1	2,0	3,6
40		0,68	1,1	2,0	3,6
60		0,68	1,0	2,0	3,5
120		0,68	1,0	2,0	3,4
∞		0,67	1,0	2,0	3,3
∞		0,674	1,036	1,960	3,291

Tablica 2.4

Wartość minimalnej liczby pomiarów, które należy wykonać przy danym poziomie ufności α , by stosunek φ błędu systematycznego Δx do odchylenia standardowego S_x przyjmował podane w tablicy wartości

α	φ	0,5	0,7	0,95	0,999
1,0		2	3	7	17
0,5		3	6	18	50
0,4		4	8	27	74
0,3		6	13	46	127
0,2		13	29	99	277
0,1		47	169	387	1089

Studenta-Fishera błąd względny φ nie przekroczył z góry zadanej wartości φ_0 , na przykład 0,1 czyli 10%.

Korzystając z dokładniejszych tablic współczynników $t_{n\alpha}$ można ustalić m. liczby pomiarów gwarantujące poprawność wyników odchylenia standardowego obliczonego metodą Gaussa, a więc z pominięciem poprawek Studenta-Fishera w tablicy 2.4

P r z y k ł a d: Wykonano cztery pomiary średnicy drutu za pomocą mikromierza otrzymując wyniki: 0,67 mm; 0,66 mm; 0,66 mm; 0,69 mm. Wartość średnia wynosi $\bar{x} = 0,670$ mm. Odchylenie standardowe obliczone według wzoru (2.20) wynosi 0,0022 mm. Współczynnik Studenta odczytany z tabl. 2.3 dla poziomu ufności 0,68 $\approx$ 0,7 wynosi $t_{4\alpha} = 1,3$. Zatem odchylenie standardowe średniej arytmetycznej wyniesie $\bar{x} = (0,670 \pm 0,003)$ mm. Gdyby interesował nas błąd maksymalny, musielibyśmy przyjąć poziom ufności 0,999, dla którego $t_{4\alpha} = 12,9$, wtedy błąd maksymalny wynosi $12,9 \cdot 0,0022$ mm = 0,03 mm i trzykrotnie przewyższa błąd systematyczny, który dla mikromierza wynosi 0,01 mm.

2.6. ZASTOSOWANIE METODY WYRÓWNAWCZEJ GAUSSA DO ANALIZY WYNIKÓW POMIARU WIELKOŚCI LINIOWO ZALEŻNYCH

Załóżmy, że przedmiotem pomiaru były dwie wielkości: x, y zależne liniowo, a spełniające zależność funkcyjną

$$y = ax + b. \quad (2.25)$$

Obrazem graficznym tej zależności jest linia prosta o nachyleniu a przecinająca oś y w punkcie b . Wykonaliśmy n pomiarów otrzymując n par wyników x_i, y_i . Załóżmy, że znamy nachylenie $\bar{a}$ oraz wartość $\bar{b}$. Wtedy z równania (2.25) obliczyć możemy wartość $y(x)$:

$$y(x_i) = \bar{a}x_i + \bar{b}, \quad (2.26)$$

która nie jest dokładnie równa wartości y_i uzyskanej w wyniku pomiaru. Rozbieżność wartości $y(x_i)$ z równania (2.26) oraz wyniku pomiaru y_i wynika z błędów pomiarowych i można ją przedstawić wzorem:

$$y(x_i) - y_i = \bar{a}x_i + \bar{b} - y_i.$$

W dalszych rozważaniach wyprowadzimy związek pomiędzy wynikami pomiaru i wartościami $\bar{a}$ i $\bar{b}$ dobranymi w ten sposób, by spełniały postulat Gaussa tzn., by suma kwadratów odchyleń $y(x_i) - y_i$ poszczególnych pomiarów y_i od wartości obliczonej $y(x_i)$ rozciągnięta na wszystkie pomiary, posiadała wartość minimalną

$$\sum_{i=1}^n [y(x_i) - y_i]^2 = \text{minimum}.$$

Podstawiając na $y(x_i)$ wartość z równania (2.26) otrzymamy

$$\sum_{i=1}^n (\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i)^2 = \text{minimum}.$$

Warunek powyższy będzie spełniony, jeżeli pochodne cząstkowe liczone względem $\bar{a}$ i $\bar{b}$ będą równocześnie zerem, czyli

$$\sum_{i=1}^n 2x_i(\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n 2(\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i) = 0.$$

Jest to układ dwóch równań, z których obliczyć możemy $\bar{a}$ i $\bar{b}$ otrzymując

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (2.27)$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (2.28)$$

Można udowodnić, że błędy — odchylenia standardowe wartości średnich wielkości $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wyrażają się wzorami:

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}}, \quad (2.29)$$

$$S_{\bar{b}} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}}, \quad (2.30)$$

w których

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{b} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (2.31)$$

We wzorach (2.27) ... (2.31) występują różnice dwu dużych, często prawie jednakowych liczb. Chcąc w takim przypadku uzyskać poprawny wynik, wszystkie rachunki wykonać musimy z bardzo dużą dokładnością, co jest bardzo uciążliwe. Wzory powyższe można znacznie uprościć stosując następujące podstawienia:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (2.32)$$

$$x_{\varepsilon i} = x_i - \bar{x}, \quad y_{\varepsilon i} = y_i - \bar{y}, \quad \varepsilon_i = y_{\varepsilon i} - \bar{a} \cdot x_{\varepsilon i} = y_i - \bar{a} \cdot x_{\varepsilon i} - \bar{y}, \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_{\varepsilon i} y_i - n \bar{y}^2. \quad (2.34)$$

Wielkości $\bar{a}$, $\bar{b}$, $S_{\bar{a}}$ i $S_{\bar{b}}$ wyrażają się wtedy następującymi wzorami:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (2.35)$$

$$\bar{b} = \bar{y} - \bar{a}\bar{x}, \quad (2.36)$$

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-1}}, \quad (2.37)$$

$$S_{\bar{b}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + \bar{x}^2 \cdot S_{\bar{a}}^2}. \quad (2.38)$$

Powyższą metodę obliczania nachylenia $\bar{a}$ i rzędnej $\bar{b}$ przecięcia prostej z osią y oraz odchyłeń standardowych $S_{\bar{a}}$ i $S_{\bar{b}}$, nazywamy metodą wyrównawczą lub metodą Gaussa najmniejszych kwadratów. Prosta o nachyleniu $\bar{a}$ przecinającą oś y w punkcie $\bar{b}$ nazywać będziemy „linią teoretyczną”. Linia teoretyczna, czyli prosta o teoretycznie obliczonych parametrach $\bar{a}$ i $\bar{b}$, jest rezultatem najlepszego uśrednienia wyników. Ważne jest to, że parametrów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nie musimy określać z wykresu, z czym mogą być związane duże błędy, lecz obliczamy je wprost z rezultatów doświadczenia. Wykonując wykres, możemy najpierw nanieść linię teoretyczną, a dopiero później same punkty pomiarowe. Wada metody polega na tym, że w wyniku obliczeń otrzymujemy wartości $\bar{a}$ i $\bar{b}$ również wtedy, gdy mierzone wielkości nie są liniowo zależne. Celem wyeliminowania takich przypadków, musimy zbadać zgodność punktów z linią teoretyczną nanosząc na wykres nie tylko punkty lecz również ich błąd. Znaczne odstępstwa ponad 30% punktów od linii teoretycznej pozwalają przypuszczać, że mierzone wielkości nie są liniowo zależne.

Metodę wyrównawczą możemy zastosować nie tylko do wielkości zależnych liniowo, lecz również do każdej pary wielkości dających się sprowadzić do zależności liniowej przez zastosowanie odpowiednich podstawień matematycznych. Na przykład w ruchu jednostajnie przyspieszonym droga i czas spełniają związek $s = \frac{1}{2}at^2$, w którym liniowo zależne są wielkości s i t^2 . Stąd do zależności powyższej zastosować możemy metodę wyrównawczą przyjmując podstawienia $y = s$ oraz $x = t^2$.

Przykład. Wyznaczono zależność wydłużenia x sprężyny od obciążającej ją masy m . Te dwie wielkości łączy związek (por. wzór 7.26)

$$mg = kx.$$

Przyjmując $y = m$ równanie powyższe napiszemy w postaci:

$$y = \frac{k}{g}x.$$

Jest to równanie prostej o nachyleniu $\bar{a} = k/g$, dla której $\bar{b} = 0$. W oparciu o wyniki pomiaru zebrane w tabeli 2.5 obliczamy nachylenie $\bar{a}$, a także wartość $\bar{b}$, która w omawianym przypadku powinna być ze-

rem. Wykonując obliczenia numeryczne najwygodniej obliczyć po kolei wszystkie wyrażenia wchodzące do równań (2.32) ... (2.34). Tabela 2.5 stanowi przykład najwygodniejszego sposobu zapisu wielkości niezbędnych do dalszych obliczeń. Wykonując podstawienia do wzorów (2.32) do (2.38) otrzymamy następujące wyniki:

$$n = 10, \quad \bar{x} = 13,4 \text{ cm}, \quad \bar{y} = 0,90 \text{ kg}, \quad \sum_{i=1}^n x_{\varepsilon_i} y_i = 47,56 \text{ kg} \cdot \text{cm},$$

$$\sum_{i=1}^n x_{\varepsilon_i}^2 = 712,5 \text{ cm}^2, \quad \varepsilon_i^2 = 0,0043 \text{ kg}^2, \quad \bar{a} = 0,0668 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$\bar{b} = 0,006 \text{ kg}, \quad S_{\bar{a}} = 0,0003 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad S_{\bar{b}} = 0,008 \text{ kg}.$$

Stąd ostatecznie

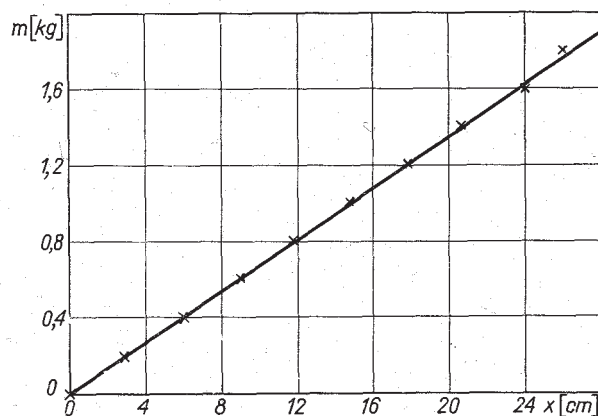
$$\bar{a} = (66,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad (S_{\bar{a}}/\bar{a})100 = 0,45\%,$$

$$\bar{b} = (6 \pm 8) \cdot 10^{-3} \text{ kg}, \quad (S_{\bar{b}}/\bar{b})100 = 140\%.$$

Tabela 2.5

Przykład opracowania serii wyników pomiarów wielkości zależnych liniowo

y_i (kg)	x_i (cm)	x_{ε_i} $\frac{x_i - \bar{x}}{\Delta x}$	$x_{\varepsilon_i} y_i$	$x_{\varepsilon_i}^2$	$\bar{a} x_{\varepsilon_i}$	y_{ε_i}	ε_i	ε_i^2
0,0	0,0	-13,4	0,00	179,6	-0,90	-0,90	0,00	0,0000
0,2	2,9	-10,5	-2,10	110,3	-0,70	-0,70	0,00	0,0000
0,4	6,0	-7,4	-2,96	54,8	-0,49	-0,50	-0,01	0,0001
0,6	9,0	-4,4	-2,64	19,4	-0,29	-0,30	-0,01	0,0001
0,8	11,8	-1,6	-1,28	2,6	-0,11	-0,10	-0,01	0,0001
1,0	14,8	+1,4	+1,40	2,0	+0,09	+0,10	+0,01	0,0001
1,2	17,8	+4,4	+5,28	19,4	+0,29	+0,30	+0,01	0,0001
1,4	20,7	+7,3	+10,22	53,3	+0,49	+0,50	+0,01	0,0001
1,6	24,0	+10,6	+16,96	112,3	+0,71	+0,70	+0,01	0,0001
1,8	26,0	+12,6	+22,68	158,8	+0,84	+0,90	+0,06	0,0036
9,0	133,6		+47,56	712,5				0,0043



2.5 Graficzny obraz wyników tabeli 2.5.

Wielkość $\bar{b}$ jest bardzo mała względem najmniejszej masy $m_1 = 0,2 \text{ kg}$; stanowi zaledwie 3% m_1 ($\bar{b}/m_1 \cdot 100 = 3\%$) i z dobrym przybliżeniem przyjąć możemy $\bar{b} = 0$. Błąd $S_{\bar{b}}$ jest bardzo duży względem $\bar{b}$, lecz jest również bardzo mały względem m_1 ; określa on możliwe odchylenie linii od punktu $x = 0, y = 0$, a więc wielkość błędu uzyskanego z obliczeń linii. Na rysunku 2.5 wykreślono linię teoretyczną i zaznaczono punkty pomiarowe.

2.7. OBLICZANIE BŁĘDU W PRZYPADKU, GDY BŁĘDY SYSTEMATYCZNE SĄ DUŻE W PORÓWNANIU Z BŁĘDEM PRZYPADKOWYM

Jak już zaznaczono, metodę Gaussa stosować możemy tylko w przypadku, gdy błąd systematyczny jest mały w porównaniu z błędem przypadkowym. Podobne zastrzeżenie dotyczy również metody Studenta-Fishera. Jako skrajny przypadek, w którym będziemy stosować metodę Gaussa, przyjmiemy taki, w którym błąd systematyczny Δx jest równy odchyleniu standardowemu S_x . Jeżeli $\Delta x \geq S_x$ lub pomiar wykonujemy jednokrotnie, wtedy musimy brać pod uwagę wyłącznie wpływ błędu systematycznego.

Nie ma możliwości tak ścisłego obliczania błędów systematycznych jak to czynimy w przypadku błędów przypadkowych. Dla wielkości prostych szacujemy błąd na podstawie dokładności lub klasy przyrządów, staranności wykonania pomiarów itp. W przypadku wielkości złożonej wpływ błędów wielkości prostych możemy uwzględnić obliczając tzw. błąd maksymalny, tzn. określając jaki maksymalny wpływ na wynik końcowy posiadają błędy systematyczne poszczególnych wielkości prostych.

Założmy, że wielkość $z = f(x_1, x_2, \dots)$ jest funkcją l zmiennych. Znamy wartości $x_1, x_2, \dots$ oraz ich błędy $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$. Rozwijając funkcję z w szereg Taylora i zaniedbując wyrazy wyższych rzędów otrzymamy

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots) = f(x_1, x_2, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots) - f(x_1, x_2, \dots)$$

otrzymamy*:

$$\Delta z = \sum_{k=1}^l \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k. \quad (2.39)$$

Zakładając przypadek najniekorzystniejszy, w którym wszystkie wyrazy wnoszą przyczynki tego samego znaku otrzymamy

$$\Delta z = \sum_{k=1}^l \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_k} \right| \Delta x_k. \quad (2.40)$$

Wzór powyższy upraszcza się znacznie w przypadku, gdy funkcję f przedstawić można w postaci iloczynu:

$$z = A \prod_{i=1}^l x_i^{a_i},$$

* Wyrażenie (2.39) możemy interpretować jako różniczkę zupełną wielkości z .

wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = A a_i x_i^{a_i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l x_k^{a_k} = \frac{a_i}{x_i} z.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (2.40) otrzymamy

$$\frac{\Delta z}{z} = \sum_{k=1}^l \left| \frac{a_k}{x_k} \Delta x_k \right|. \quad (2.41)$$

Przykład. W doświadczeniu mierzono współczynnik rozszerzalności liniowej ciał stałych stosując wzór końcowy

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{\delta l}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (a)$$

Długość pręta zmierzona w temperaturze $\tau_1 = (18 \pm 1)^\circ\text{C}$ wynosiła $l_0 = (107,2 \pm 0,1)$ cm. Pręt podgrzano do temperatury $\tau_2 = (98 \pm 1)^\circ\text{C}$ i stwierdzono, że jego długość wzrosła o $\delta l = (0,96 \pm 0,01)$ mm. Obliczony ze wzoru (a) współczynnik rozszerzalności liniowej wynosił $\alpha = 11,207 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$. Celem obliczenia błędu maksymalnego do wzoru (a) zastosowano formułę (2.40) otrzymując przy założeniu $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_2 = \Delta \tau = 1^\circ\text{C}$ następujący wzór:

$$|\Delta \alpha| = \left| \frac{1}{l_0(\tau_2 - \tau_1)} \right| \left[\left| \frac{\delta l}{l_0} \Delta l_0 \right| + |\Delta \delta l| + 2 \left| \frac{\delta l}{\tau_2 - \tau_1} \Delta \tau \right| \right].$$

Podstawiając wielkości wyznaczone doświadczalnie otrzymuje się

$$|\Delta \alpha| = \frac{1}{80 \cdot 1,072} \left(\frac{0,96}{1,072} 10^{-3} + 0,01 + 2 \frac{0,96}{80} \right) \text{K}^{-1}$$

$$|\Delta \alpha| = 0,424 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1} \simeq 0,43 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}.$$

Wynik końcowy napiszemy w postaci:

$$\bullet \quad \alpha = (11,21 \pm 0,43) \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}; \quad (\Delta \alpha / \alpha) 100 = 3,9\%.$$

2.8. ZAOKRĄGLANIE I PORÓWNYWANIE WYNIKÓW

Założmy, że dla pewnej serii pomiarów obliczono bardzo dokładnie wartość średnią otrzymując $\bar{h} = 4,315233$ mm, oraz odchylenie standardowe średniej arytmetycznej: $S_{\bar{h}} = 0,01514$ mm. Wynik końcowy zapisano w postaci

$$h = (4,315233 \pm 0,01514) \text{ mm} \quad \text{zły wynik.}$$

Mimo iż obliczenia wykonano bardzo dokładnie, wynik ten nie jest poprawny. Nigdy wartości mierzonej ani błędu nie znamy dokładnie. Celem rachunku błędów jest ustalenie przedziału, w którym z określonym prawdopodobieństwem zawarta jest wartość rzeczywista. Z uwagi na przedział ufności, który dla odchylenia standardowego wynosi 68%, jak i z uwagi na sam charakter prawdopodobieństwa, sens fizyczny posiada tylko pierwsze miejsce znaczące wyniku $S_{\bar{h}}$, a więc w naszym przypadku jedynka (0,01514). W pewnych przypadkach podaje się jeszcze również i drugie miejsce znaczące; natomiast miejsce trzecie i następne są cyframi, które wynikły z rachunku i nie posiadają żadnego sensu fizycznego. Zatem każdy błąd należy zaokrąglić do jednego, lub co najwyżej do dwóch miejsc znaczących.

W pracowni, przy zaokrąglaniu wyników, stosować będziemy następujące zasady: błąd obliczamy do drugiego miejsca znaczącego, a następnie zaokrąglamy (zawsze w górę) do pierwszego miejsca w przypadku, gdy na skutek zaokrąglenia wynik nie zwiększy się więcej niż o 10% (1/10 błędu). Jeżeli w wyniku zaokrąglenia błąd zwiększyłby się więcej niż o 10%, podajemy błąd z dokładnością do dwóch miejsc znaczących. W żadnym przypadku nie podajemy trzeciego miejsca. Błędów nie można zaokrąglać w dół, gdyż w żadnym przypadku nie można obniżyć wyniku uzyskanego z obliczeń. Zatem poprawnie zaokrąglony wynik w cytowanym przykładzie wyniesie $S_{\bar{h}} = 0,016 \text{ mm}$.

Wynik pomiaru obliczamy o jedno miejsce dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono błąd, po czym zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego wyznaczono błąd. Dalszych miejsc pisać nie wolno, ponieważ nie posiadają one żadnego sensu fizycznego. Wynik zaokrąglamy według normalnych reguł, to znaczy cyfry od 1 do 4 zaokrąglamy w dół, cyfry 6 do 9 w górę, a cyfrę 5 w górę w przypadku, gdy poprzedza ją cyfra nieparzysta, natomiast w dół, gdy poprzedza ją cyfra parzysta. Cytowany na początku paragrafu wynik, po zaokrągleniu ma postać

$$\bar{h} = (4,315 \pm 0,016) \text{ mm} \quad \text{poprawny wynik.}$$

W przypadku, gdy z obliczeń otrzymuje się wynik składający się z jednej cyfry znaczącej i zer, np. $\bar{d} = 0,5000 \text{ mA}$, a odchylenie standardowe wynosi $S_{\bar{d}} = 0,0002 \text{ mA}$, to wynik pomiaru należy zapisać: $d = (0,5000 \pm 0,0002) \text{ mA}$. Pominięcie w wyniku zer po przecinku, znaczących w tym wypadku, byłoby błędem. Zaleca się wyniki końcowe pisać w takiej potęgze, by błędem obarczone były miejsca dziesiętne i setne. A oto kilka przykładów zaokrąglania wyników.

Przed zaokrągleniem	Po zaokrągleniu
$m = (136,521 \pm 0,115) \text{ g}$,	$m = (136,52 \pm 0,12) \text{ g}$,
$B = (0,036251 \pm 0,000111) \text{ T}$,	$B = (36,25 \pm 0,12) \text{ mT}$,
$C = (65,273 \pm 0,321) \cdot 10^{-3} \text{ }\mu\text{F}$,	$C = (65,27 \pm 0,33) \text{ nF}$,
$I = (251,67 \pm 0,79) \text{ }\mu\text{A}$,	$I = (251,7 \pm 0,8) \text{ }\mu\text{A}$,
$V = (365,135 \pm 0,089) \text{ cm}^3$,	$V = (365,14 \pm 0,09) \text{ cm}^3$,
$v = (96,3659 \pm 0,0185) \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,	$v = (963,6 \pm 0,2) \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,
$v = (96,3659 \pm 0,0171) \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,	$v = (963,66 \pm 0,18) \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Często zachodzi potrzeba porównania dwóch wielkości wyznaczonych doświadczalnie różnymi metodami lub porównania wielkości zmierzonej z wartością podaną w tablicach. Zazwyczaj wielkości uzyskane w różnych pomiarach lub różnymi metodami nie są dokładnie równe i wynoszą odpowiednio

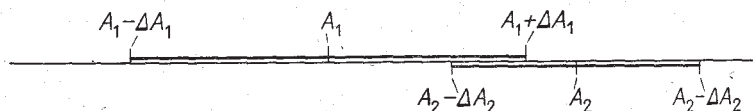
$$A_1 \pm \Delta A_1 \quad \text{oraz} \quad A_2 \pm \Delta A_2,$$

gdzie ΔA_1 i ΔA_2 oznaczają błędy maksymalne. W przypadku, gdy znamy odchylenia standardowe $S_{\bar{A}_1}$ i $S_{\bar{A}_2}$, przyjmujemy błędy maksymalne w sensie $\Delta A_2 = 3S_{\bar{A}_2}$, $\Delta A_1 = 3S_{\bar{A}_1}$. Z własności błędu maksymalnego wynika, że rzeczywista wartość A_0 powinna mieścić się równocześnie w następujących dwóch przedziałach:

$$\langle (A_1 - \Delta A_1), (A_1 + \Delta A_1) \rangle, \\ \langle (A_2 - \Delta A_2), (A_2 + \Delta A_2) \rangle.$$

Wyniki są zgodne wtedy, gdy obydwa przedziały będą się częściowo przekrywały lub gdy będą przynajmniej styczne, co graficznie przedstawiono na rys. 2.6. Warunek przekrywania lub styczności przedziałów jest równoważny następującej nierówności:

$$|A_1 - A_2| \leq |\Delta A_1| + |\Delta A_2|. \quad (2.42)$$



2.6. Przekrywanie się przedziałów błędów dla dwóch niezależnych pomiarów tej samej wielkości prostej

Jeżeli wynik A_1 jest wynikiem doświadczenia, a wynik A_2 jest wartością z tablic, to najczęściej błąd ΔA_2 jest znacznie mniejszy od ΔA_1 i możemy w przybliżeniu założyć $\Delta A_2 \simeq 0$. Wtedy ostatnie równanie przyjmie postać

$$|A_1 - A_2| \leq |\Delta A_1|, \quad \text{przy} \quad \Delta A_1 \gg \Delta A_2. \quad (2.42a)$$

Jeżeli jest spełniona nierówność (2.42) lub (2.42a) mówimy, że porównywane wyniki są zgodne.

2.9. GRAFICZNA ANALIZA WYNIKÓW

Graficzną metodę przedstawiania wyników stosujemy wtedy, gdy mierzymy równocześnie dwie wielkości x i y współzależne od siebie. Wykonując pomiary, dla zadanych z góry wartości jednej z wielkości np. x mierzymy wielkość drugą. Wykres jest graficznym obrazem badanej zależności.

Metodą graficzną posługujemy się w następujących przypadkach:

a. Gdy chcemy udowodnić, że badane wielkości spełniają założony uprzednio związek funkcyjny. Na przykład celem sprawdzenia czy ciało porusza się ruchem jednostajnym, wystarczy zbadać i wykreślić zależność drogi od czasu. Te dwie wielkości spełniają związek $s = vt$. Jeżeli obrazem graficznym jest linia prosta, to jest spełnione równanie liniowe, a tym samym ruch jest jednostajny.

b. Gdy chcemy dowiedzieć się jaki typ zależności funkcyjnej spełniają mierzone wielkości. Jeżeli na przykład wykres przedstawia w liniowym układzie linię prostą, to mamy do czynienia z zależnością liniową typu $y = ax$, jeżeli parabolę — to występuje zależność kwadratowa typu $y = ax^2$, itp.

c. Gdy badana zależność nie da się przedstawić za pomocą prostych związków matematycznych. Jako przykład możemy podać zależność gęstości wody od temperatury, pętlę histerezy itp.

Wykresy wykonujemy na tzw. papierze funkcyjnym. Najczęściej na papierze takim naniesiono dwie rodziny prostych równoległych. Oznaczmy odległości kolejnych linii od początku układu przez x' oraz y' .

Jeżeli podziałki na obydwu osiach są liniowe tzn. $x' = kx$ oraz $y' = ly$, gdzie k i l są wielkościami stałymi, a odległość między liniami wynosi 1 mm, papier nazywamy milimetrowym. Papier milimetrowy stosujemy do wykreślania wielkości zależnych liniowo $y = ax + b$.

W tzw. papierze logarytmicznym odległości kolejnych linii wyrażają się wzorami:

$$x' = k \log x, \quad y' = l \log y.$$

Na papierze logarytmicznym wykreślamy zależności funkcyjne typu

$$y = ax^b,$$

które po zlogarytmowaniu dają zależność

$$\log y = \log a + b \log x. \quad (2.43)$$

Wielkości związane zależnością funkcyjną $y = ab^x$, która po logarytmowaniu daje

$$\log y = \log a + x \log b, \quad (2.44)$$

wykreślamy na papierze półlogarytmicznym, na którym na osi x stosuje się podziałkę liniową $x' = kx$, a na osi y logarytmiczną $y' = l \log y$.

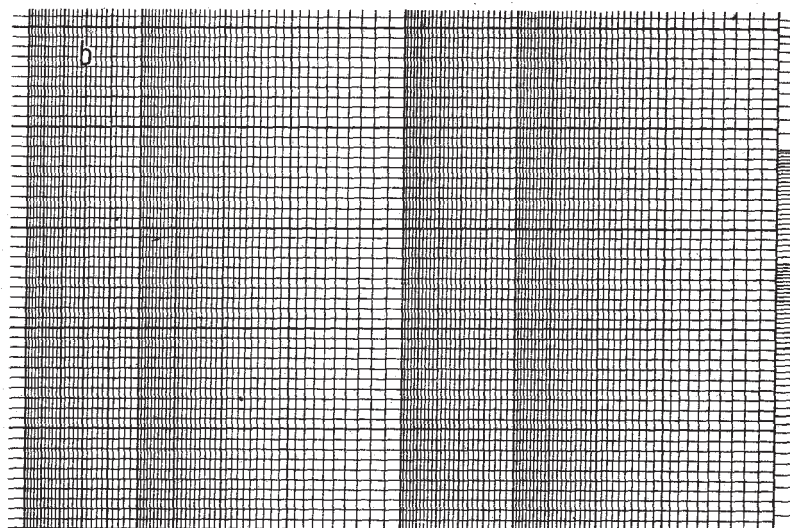
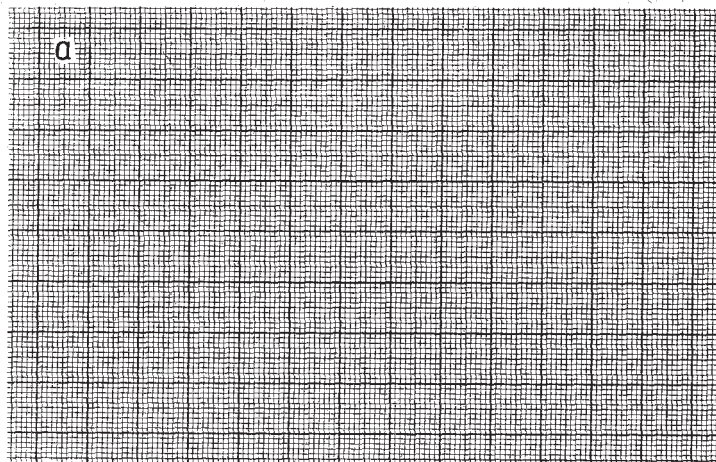
W niektórych przypadkach stosujemy jeszcze inne rodzaje papierów funkcyjnych np. o współrzędnych biegunowych itp. Rysunek 2.7 przedstawia najważniejsze typy papierów funkcyjnych.

Sporządzając wykres dobieramy taki papier funkcyjny by wykreślana zależność była zbliżona do prostej. Niektóre nieomawiane dotąd typy zależności funkcyjnych przedstawić możemy w postaci prostej, przez zastosowanie odpowiednich podstawień. I tak parabola jest linią prostą w układzie $y(x^2)$, hiperbola ($y = k/x$) w układzie $y(1/x)$ itp.

Wykreślanie. Po dokonaniu wyboru papieru funkcyjnego dobieramy skalę na osiach przestrzegając przy tym wymienionych pewnych zasad. Błąd pomiaru nie powinien przekraczać 5 mm, lecz powinien być większy od grubości linii. Przyjęta skala powinna dawać możliwość łatwego odczytu współrzędnych dowolnego punktu. Warunek powyższy jest spełniony, jeżeli jednej działce skali odpowiada $1 \cdot 10^n$, $2 \cdot 10^n$, $3 \cdot 10^n$ lub $5 \cdot 10^n$ jednostek. Nachylenie krzywej w najbardziej interesujących nas punktach powinno być zbliżone do jedynki. Wykres powinien zajmować całą powierzchnię arkusza. Podziałki nie muszą rozpoczynać się od zera, a skrajne wartości zmiennej powinny leżeć w pobliżu początku i końca arkusza.

Po dobraniu skali i naniesieniu osi współrzędnych, nanosimy punkty pomiarowe. Zaznaczamy je krzyżykami, kółkami lub innymi figurami geometrycznymi. Kropek nie należy stosować, gdyż są niewidoczne. Położenie punktu pomiarowego jest określone punktem przecięcia linii tworzących krzyżyk, a w przypadku stosowania figur geometrycznych znajduje się w ich środku i może dodatkowo być oznaczone punktem. W przypadku, gdy na jednym arkuszu nanosimy kilka krzywych, punkty należące do każdej krzywej oznaczamy w inny sposób.

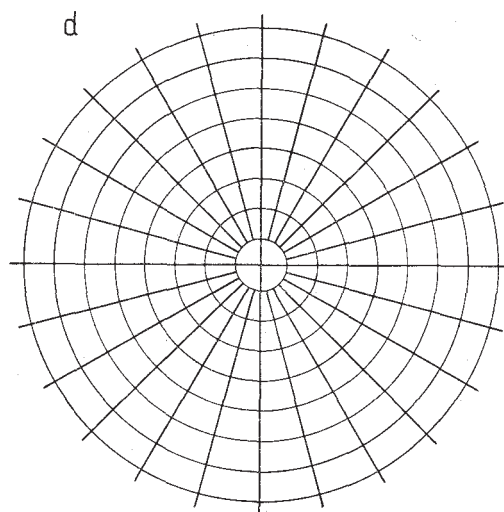
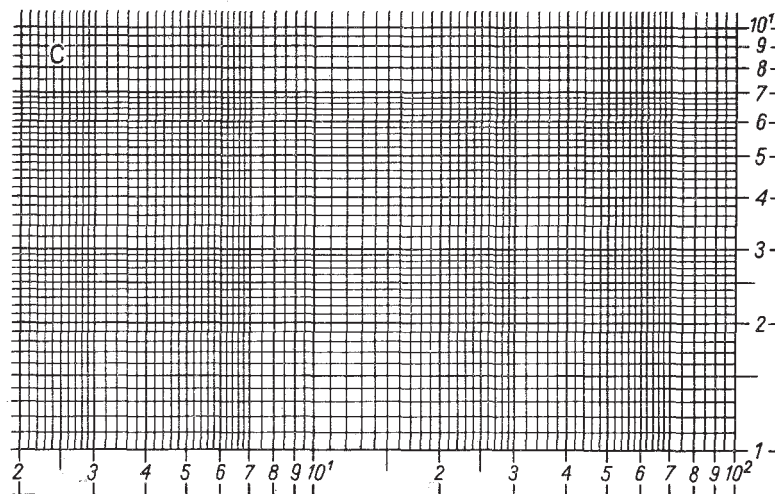
Trzecią czynnością jest zaznaczenie błędów. Uwzględniając błąd odczytu, współrzędne punktu pomiarowego można zapisać w postaci: $I \pm \Delta I$, $U \pm \Delta U$, gdzie znak Δ oznacza błąd maksymalny lub odchylenie standardowe. Dla punktu zaznaczonego na rys. 2.8a oznacza to, że rzeczywista wartość prądu mieści się w przedziale od $I + \Delta I$



2.7.1. Różne rodzaje papieru funkcyjnego: milimetry (a), półlogarytmiczny (b).

do $I - \Delta I$, a napięcie od $U + \Delta U$ do $U - \Delta U$. Zaznaczenie tych przedziałów na wykresie jest równoważne z otoczeniem punktu pomiarowego prostokątem o bokach $2\Delta I$ oraz $2\Delta U$ zwanym prostokątem błędów. Prostokąty błędów należy nanieść dla kilku punktów. Po wykreśleniu krzywej należy nanieść prostokąty błędów również wokół punktów znacznie odbiegających od krzywej.

Ostatnią czynnością jest wykreślenie samej krzywej. Krzywą należy wykreślić z pomocą krzywika (najwygodniejsze są przezroczyste krzywki oraz przezroczyste liniały). Krzywa nie powinna przebiegać dokładnie przez wszystkie punkty pomiarowe, ale musi przechodzić przez ich prostokąty błędów maksymalnych lub przez 70% prostokątów określonych przez odchylenie standardowe. Liczba punktów znajdujących się po pra-



2.7.2. Różne rodzaje papieru funkcyjnego: logarytmiczny (c), biegunowy (d).

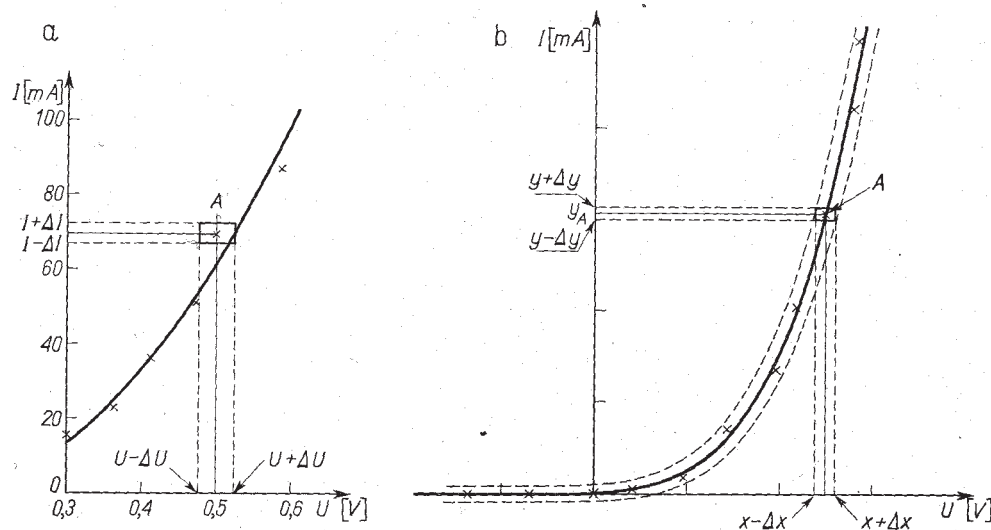
wej i po lewej stronie krzywej powinna być w miarę możliwości równa na każdym jej odcinku. Ze względu na ograniczoną liczbę punktów ostatni postulat nie da się spełnić dokładnie.

Dla wszystkich zależności liniowych, parametry prostej: punkt b przecięcia z osią y oraz nachylenie a , można obliczyć wprost z danych pomiarowych w sposób opisany w § 2.6. Mając te dane, przy sporządzaniu wykresu nanosimy linię teoretyczną o nachyleniu a przecinającą oś y w punkcie b , a dopiero następnie nanosimy punkty pomiarowe.

Może się zdarzyć, że któryś z punktów leży w znacznej odległości od krzywej. Gdy pomiary dotyczą zjawiska znanego, należy go pominąć uznając że jest on obciążony błędem grubym. Jeżeli pomiary dotyczą zjawiska nieznanego, to należy je powtórzyć

i wykonać dodatkowe pomiary w bezpośrednim sąsiedztwie danego punktu, by przekonać się, czy punkt ten jest rzeczywiście obarczony błędem grubym, czy też przebieg krzywej jest inny.

Odczytywanie wartości z wykresu i wyznaczenie nachylenia. Maksymalny błąd jakim obarczony jest dowolny punkt leżący na krzywej nie przekracza błędu jakim obarczone były punkty pomiarowe. Zatem doświadczalną krzywą otoczyć można krzywymi pomocniczymi oddalonymi od niej o wartość błędu (rys. 2.8b). Skoro chcemy odczytać wartość odciętej x_A dla założonej wartości rzędnej y_A , to zakładamy, że leżący na krzywej punkt A , którego położenie wyznacza rzędna y_A , otoczony jest takim samym prostokątem błędu jak każdy inny punkt pomiarowy. Zatem interesująca nas rzędna y_A obarczona jest błędem Δy , a odczytana dla punktu A odcięta x jest obarczona błędem Δx . Jeżeli na wykresie zaznaczono odchylenie standardowe, to również błędy Δx i Δy są odchyleniami standardowymi.



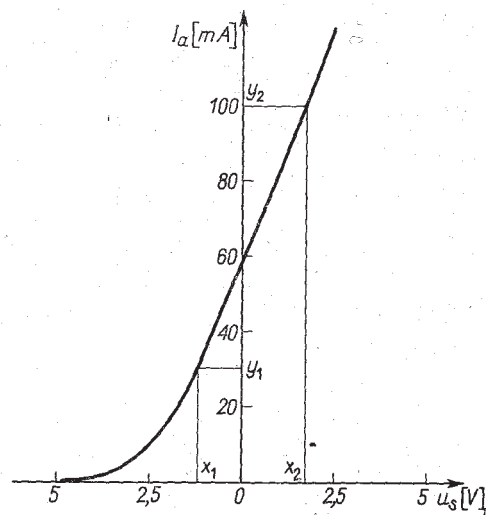
2.8. Zaznaczanie błędów na wykresach: nanoszenie prostokąta błędu (a), błąd krzywej (b).

Nachyleniem a krzywej nazywamy stosunek przyrostu rzędnej $y_2 - y_1$ do odpowiadającego mu przyrostu odciętej $x_2 - x_1$ (por. rys. 2.9),

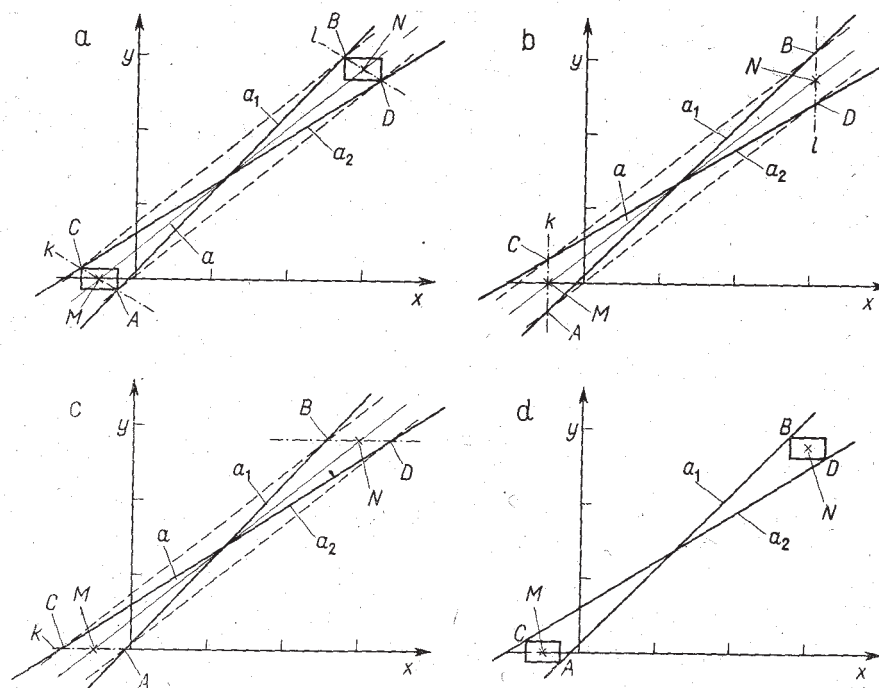
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.45)$$

W granicznym przypadku, gdy $x_2 - x_1$ dąży do zera nachylenie jest równe pochodnej y względem x . Należy jednak pamiętać, że nachylenie krzywej, mimo podobieństwa do tangensa kąta nachylenia, jest najczęściej wielkością mianowaną i nie można jej interpretować jako tangensa kąta zmierzonego na wykresie. Nachylenie wyznaczyć można w sposób omówiony w § 2.6 lub mniej dokładnie z definicji, którą jest równanie (2.45), to znaczy jako stosunek przyrostu rzędnej do przyrostu odciętej. Na rysunku 2.10 pokazano pewną, doświadczalnie wyznaczoną zależność liniową oraz pomocnicze

krzywe błędu. Linia doświadczalna nie musi przebiegać dokładnie w taki sposób jak zaznaczono ją na rysunku, lecz musi przebiegać całkowicie przez obszar ograniczony krzywymi błędu. W obszarze tym można przeprowadzić nieskończenie wiele prostych o nachyleniu zawartym między dwiema skrajnymi wartościami a_1 i a_2 . Przy określaniu wartości a_1 i a_2 wzajemna odległość punktów końcowych odcinka MN , dla którego



2.9. Zasada obliczania nachylenia krzywej.



2.10. Wybór punktów końcowych do obliczania nachylenia i błędu nachylenia.

wyznaczamy nachylenie, powinna być jak największa, czyli powinny one ograniczać prostoliniowy odcinek krzywej lub powinny być to końcowe punkty pomiarowe w przypadku zależności liniowej. Końcowe punkty A, B, C, D prostych o nachyleniach a_1 i a_2 powinny leżeć na dwóch prostych równoległych k, l przechodzących przez punkty M, N wybranych w jeden ze sposobów pokazanych na rysunkach 2.10a, 2.10b lub 2.10c.

Jako rzeczywiste nachylenie przyjmujemy średnią arytmetyczną

$$a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2). \quad (2.46)$$

Błąd maksymalny nachylenia jest równy połowie różnicy dwóch skrajnych wartości nachylenia

$$|\Delta a| = \frac{1}{2} |a_1 - a_2|. \quad (2.47)$$

2.10. PLANOWANIE POMIARÓW

W praktyce życia codziennego jak i w fizyce szkolnej często wykonujemy pomiary różnych wielkości fizycznych. Jednak z naukowego punktu widzenia pomiary te są bezwartościowe, ponieważ nie zawierają oceny dokładności pomiaru. W pracowni fizycznej musimy nie tylko oceniać dokładności wykonywanych pomiarów, lecz również w taki sposób planować ich wykonanie, by osiągnąć wynik optymalny, czyli obarczony najmniejszym błędem.

Ze względu na sposób planowania, pomiary podzielić możemy na następujące grupy:

1. Pomiary wielkości prostych. 2. Pomiary wielkości złożonych. 3. Pomiary wielkości liniowo zależnych. 4. Pomiary wielkości zależnych, nie związanych prostą zależnością funkcyjną. Omówimy kolejno sposób planowania pomiarów należących do poszczególnych grup.

1. W przypadku pomiaru wielkości prostej wystarczy zaplanować liczbę pomiarów. Podstawową przesłanką pozwalającą ustalić liczbę pomiarów jest stosunek błędu systematycznego do odchylenia standardowego.

Celem uzyskania najgrubszego oszacowania dotyczącego tylko przybliżonego rzędu wielkości, musimy określić błąd systematyczny i wykonać próbną serię 2–3 pomiarów. Jeżeli wyniki wszystkich pomiarów są identyczne, to błąd pomiaru jest określony wyłącznie błędem systematycznym i nie można do tego przypadku stosować teorii błędów przypadkowych, a zwiększanie liczby pomiarów jest niecelowe. Jeżeli poszczególne wyniki serii próbnej nie są identyczne, lecz różnice między nimi przekraczają 2-krotnie błąd systematyczny możemy przypuszczać, że błąd przypadkowy jest tego samego rzędu co błąd systematyczny. Wtedy nie ma sensu duża seria i ograniczamy się do kilku pomiarów, stosując przy obliczeniach metodę Studenta–Fishera dla poziomu ufności $0,68 \approx 0,7$.

W przypadku, gdy różnice między wynikami poszczególnych pomiarów serii próbnej znacznie przekraczają błąd systematyczny, precyzję pomiarów możemy zwiększyć, zwiększając ich liczbę do wartości, dla której stosować możemy teorię Gaussa, a więc

dla poziomu ufności 0,7 wykonujemy $n \gg 6$ pomiarów, minimum 10 pomiarów (por. § 2.5) i dla tego przypadku obliczamy odchylenie standardowe.

W przypadku, gdy liczba pomiarów przekracza 3, ich wyniki ujmujemy w tabelę, której wzór stanowi tabela 2.2. W przypadku bardzo dużej liczby wykonanych pomiarów, zapisujemy tylko ich wyniki a następnie porządkujemy według rosnących wartości ujmując w tabelę, której wzorem jest tabela 2.1.

Wykonując dużą serię pomiarów wielkości prostej musimy sprawdzić, czy do tej serii stosować możemy teorię Gaussa. W tym celu obliczamy błąd przeciętny i sprawdzamy, czy spełniony jest związek (2.24). Jeżeli lewa strona równania (2.24) różni się od prawej więcej niż o 10 %, metody Gaussa nie możemy stosować.

2. Zagadnienia związane z planowaniem pomiarów wielkości złożonej rozpoczniemy od przypadku prostszego, w którym wielkość złożona jest iloczynem dowolnych potęg wielkości prostych. Jako podstawę analizy wpływu poszczególnych wielkości prostych na dokładność wielkości złożonej przyjmijmy wyrażenie na błąd maksymalny (2.41),

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \sum_{i=1}^n \left| a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right|. \quad (2.48)$$

Z wzoru powyższego wynika, że systematyczny błąd względny wielkości złożonej jest sumą iloczynów wykładników potęgowych i błędów względnych poszczególnych wielkości prostych. Zatem pomiary winniśmy planować w taki sposób, by błędy względne wnoszone przez poszczególne składniki sumy były tego samego rzędu. Musimy zwiększać precyzję pomiaru tych wielkości, które wnoszą największy błąd, czyli wielkości małych oraz tych, które posiadają największe wykładniki potęgowe.

P r z y k ł a d. Załóżmy, że przedmiotem pomiaru jest moduł Younga przez wydłużenie. Moduł oblicza się z wzoru

$$E = \frac{m a l}{\pi r^2 \delta l}.$$

W wyniku pomiaru uzyskano: $m = (800 \pm 10) \text{ g}$, $r = (0,11 \pm 0,01) \text{ mm}$, $l = (2000 \pm 10) \text{ mm}$, $\delta l = (0,27 \pm 0,01) \text{ mm}$. Wzór (2.48) przyjmuje w tym przypadku postać

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{\Delta l}{l} \right| + 2 \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + \left| \frac{\Delta(\delta l)}{\delta l} \right|,$$

stąd

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 0,013 + 0,005 + 0,18 + 0,04.$$

Drugi wiersz uzyskano po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń. Jak widać największy błąd 18% wnosi składnik trzeci. Zatem celem uzyskania większej dokładności należy w pierwszym rzędzie zwiększyć precyzję pomiaru wielkości wchodzącej do składnika trzeciego, czyli pierwsze dwa składniki w tym przypadku wnoszą bardzo mały udział do błędu $\frac{\Delta E}{E}$ i można ich wpływ zaniedbać.

Te same zasady obowiązują w przypadku odchylenia standardowego średniej arytmetycznej, lecz w tym przypadku, ze względu na postać wzoru (2.21), w którym występuje suma kwadratów składniki pierwszy i drugi odgrywają jeszcze mniejszą rolę,

natomiast dodatkowo wzrasta rola składnika 3, a więc wielkości małej występującej w drugiej potęgce. Jeżeli założymy, że podane w przykładzie błędy byłyby odchyleniami standardowymi, wtedy względne odchylenie standardowe wyniku (por. wzór 2.22) wyrazi się wzorem:

$$\frac{S_E}{E} = \sqrt{0,016 + 0,0025 + 3,2 + 0,16} \cdot 10^{-1}.$$

W tym przypadku pierwsze dwa składniki sumy można pominąć, również składnik czwarty jest praktycznie do zaniedbania wobec składnika trzeciego. Zatem i tu mała precyzja pomiaru r daje decydujący przyczynek błędu ostatecznego.

W przypadku ogólnym, gdy wielkość złożona nie sprowadza się do iloczynu potęg wielkości prostych w zasadzie obowiązują te same zasady planowania pomiarów i tu o przyczynku wnoszonym przez błąd poszczególnych wielkości prostych decyduje jej błąd względny. Możemy to udowodnić pisząc równanie (2.19) w postaci

$$S_z^2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \left(\frac{S_{x_i}}{x_i} \right)^2.$$

Pewne komplikacje wprowadza współczynnik zawierający pochodną cząstkową. W pracowni, celem ustalenia najwłaściwszego planu pomiarów, należy zawsze wykonać próbną serię pomiarów, ocenić ich błędy systematyczne i wykonać próbną analizę błędów celem ustalenia właściwej „taktyki” pomiaru poszczególnych wielkości prostych. Pomiary poszczególnych wielkości prostych wchodzących w skład wielkości złożonej planujemy tak samo jak w przypadku pomiaru wielkości prostych.

Na zakończenie zwrócimy jeszcze uwagę i na to, że skoro dla wielkości złożonej chcemy wyznaczyć odchylenie standardowe, a wpływ błędów niektórych wielkości na błąd wyniku końcowego można pominąć, tak jak to miało miejsce dla m i l w omawianym przykładzie modułu Younga, to dla tych wielkości nie musimy wyznaczać błędu średniego kwadratowego. Błąd średni kwadratowy $S_{\bar{x}_i}$ wystarczy wyznaczyć tylko dla tych wielkości prostych, które decydują o najwyższych dwóch rzędach wielkości błędu. Wynik końcowy i tak zawsze ograniczamy tylko do tych rzędów. Zatem w cytowanym przykładzie wystarczy powtarzać wielokrotnie pomiary r i δl i obliczyć S_r i $S_{\delta l}$, natomiast na błędy wielkości m i l przyjąć można nawet błąd maksymalny.

3. Bardzo prosty jest przypadek pomiaru dwóch wielkości zależnych liniowo. Wtedy zazwyczaj wyznaczyć musimy parametry badanej zależności liniowej, a więc nachylenie i punkt przecięcia z osią y . Wielkości te określamy metodą najmniejszych kwadratów postępując w sposób omawiany w § 2.6. Chcąc dobrze przygotować dane do obliczeń wybieramy do pomiaru n (> 10) wartości zmiennej niezależnej dobranych w ten sposób, by równomiernie pokrywały cały przedział zmienności. Wykonujemy pomiar, a następnie sporządzamy orientacyjny wykres. W przypadku, gdy odchylenia punktów od przebiegu liniowego są nieznaczne, tzn. przynajmniej 70 % prostokątów błędów leży na krzywej, możemy przyjąć, że wyniki są poprawne; jeżeli istnieją obawy co do poprawności wyników, pomiar powtarzamy. Wyniki ujmujemy w tabelę podobną do tab. 2.3 ułatwiającą wykonanie wszystkich obliczeń.

4. W pracowni spotykamy często przypadki pomiaru wielkości zależnych, nie spełniających związku liniowego. Celem uniknięcia konieczności stosowania papieru

o podziałkach nieliniowych, jak również, celem uproszczenia rachunków, zależności takie najczęściej sprowadzamy do związków liniowych, stosując odpowiednie podstawienia. Np. dla przypadku drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym $y = \frac{1}{2}at^2$ zależność sprowadzimy do związku liniowego podstawiając $x = t^2$, więc $y = \frac{1}{2}ax$.

Sposób planowania pomiarów jest wtedy podobny jak w przypadku 3, a nieco tylko komplikują się obliczenia. Nim przystąpimy do sporządzenia wykresu próbnego, obliczyć musimy wartości t^2 i wykreślamy zależność $y(t^2) = y(x)$. W tabeli pomiarów rezerwujemy dodatkową kolumnę dla $t^2 = x$.

W przypadku pomiaru dwóch wielkości zależnych, lecz nie spełniających żadnej zależności funkcyjnej (pętla histerezy, krzywa rezonansu itp.) wykonujemy serię pomiarów oraz próbny wykres i sprawdzamy, czy punkty pomiarowe wyznaczają jednoznacznie przebieg badanej krzywej. Punkty powinny być zagęszczone w obszarach o dużej krzywiznie oraz na odcinkach o dużym nachyleniu. W ostatecznej serii pomiarów planujemy takie wartości odciętej, by uzyskać właściwe zagęszczenie punktów. Jeżeli zachodzi konieczność odczytywania wartości z wykresów, wtedy przyjmujemy, że krzywa jest obciążona błędem systematycznym równym błędowi systematycznemu poszczególnych punktów pomiarowych.

2.11. LITERATURA

1. H. Hänsel, *Podstawy rachunku błędów*, Warszawa 1968.
2. A. Strzałkowski, A. Śliżyński, *Matematyczne metody opracowania wyników pomiarów*, Warszawa 1969.
3. J. W. Linnik, *Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowania obserwacji*, Warszawa 1962.
4. T. A. Agekian, *Osnovy teorii oszibok*, Moskwa 1968.
5. W. Pogorzelski, *Zarys rachunku prawdopodobieństwa i teorii błędów*, Warszawa 1948.

3. PROSTE PRZYRZĄDY DO POMIARU WIELKOŚCI MECHANICZNYCH I CIEPLNYCH

3.1. POMIARY DŁUGOŚCI I KĄTA

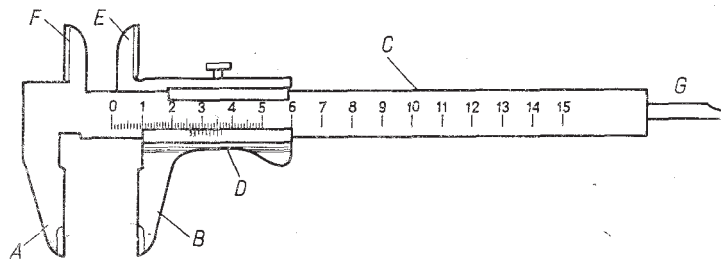
W zależności od stopnia wymaganej dokładności mierzenia do pomiaru długości stosujemy: przymiar lub miarkę milimetrową, suwmiarkę, mikromierz lub czujnik zegarowy. *Przymiarem* nazywamy miarkę długości 1 m o dokładności 1 mm, a *miarką milimetrową* liniał o takiej samej dokładności lecz krótszy. Miarki tego typu są dobrze znane z praktyki życia codziennego i nie wymagają specjalnego opisu.

Do pomiarów z dokładnością do 0,1 mm służą *suwmiarki* (rys. 3.1). Suwmiarka składa się ze sztaby *C* z podziałką milimetrową zakończoną szczęką *A* i suwaka *D* ze szczęką *B*. Na suwaku znajduje się dodatkowa skala zwana noniusem. Noniusz posiada 10 kresk na długości 9 mm. Gdy szczęki *A* i *B* są zaciśnięte, zerowa kreska noniusza przedłuża zerową kreskę skali, a 10-ta kreska noniusza — 9-tą kreskę skali. Działki noniusza są o 0,1 mm krótsze od działek skali milimetrowej. Stąd po przesunięciu

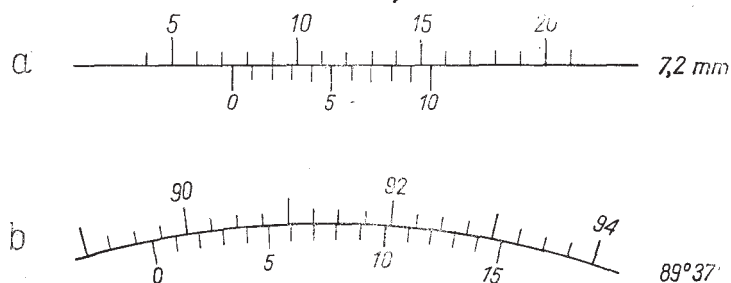
noniusza o 0,1 mm pierwsza kreska noniusza przedłuża jedną z kresk skali (w tym przypadku pierwszą), po przesunięciu o 0,2 mm druga kreska noniusza przedłuża inną kreskę skali (drugą) itd. Ogólnie ilość dziesiątych części milimetra jest równa numerowi działki noniusza przedłużającej jedną z kresk skali milimetrowej. Tak więc zerowa kreska noniusza wskazuje ilość całych milimetrów, a kreska noniusza przedłużająca jedną z kresk skali milimetrowej wskazuje ilość dziesiątych milimetra (rys. 3.2a). Zasada noniusza bywa w różnych przyrządach stosowana do odczytywania z większą dokładnością. Dokładność ta w ogólnym przypadku wyraża się ułamkiem;

$$\text{dokładność} = \frac{\text{wartość najmniejszej podziałki skali głównej}}{\text{ilość działek noniusza}}. \quad (3.1)$$

Na rys. 3.2b pokazano odczyt kąta z dokładnością do 1 minuty kątowej za pomocą skali, w której stopień podzielony jest na cztery części (15'), a noniusz posiada 15 działek. Szczęki EF w suwmiarce służą do pomiaru średnic otworów. Pręt G połączony jest z suwakiem i służy do pomiaru głębokości otworów.



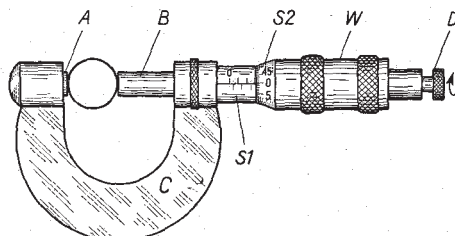
3.1. Suwmiarka.



3.2. Zasada noniusza.

Za pomocą *mikromierza* zwanego również śrubą mikrometryczną (rys. 3.3) mierzyć można z dokładnością do 0,01 mm. Mikromierz składa się z części nieruchomej C ze skalą S1 oraz wrzecionka mikrometrycznego W ze skalą S2. Na górnej części skali S1 są zaznaczone milimetry, kreskami poniżej linii poziomej zaznaczono każde pół mm. Zazwyczaj jeden pełen obrót wrzecionka odpowiada przesunięciu szczęki B o 0,5 mm, a skala S2 posiada podziałkę od 0 do 50. Odczytując wskazania mikromierza musimy zapisać najpierw ilość pełnych milimetrów oraz zwrócić uwagę na to, czy na skali jest już widoczna kreska odpowiadająca 1/2 mm. Jeżeli nie, to wskazanie na skali wrzecionka jest równe ilości setnych części milimetra. Gdy kreska oznaczająca 1/2 mm jest już

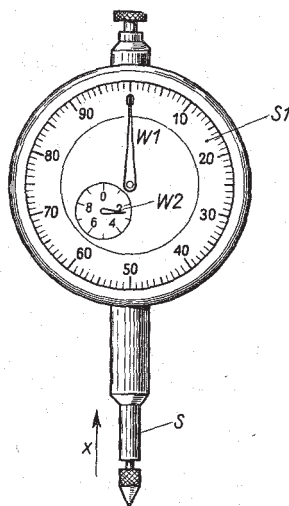
widoczna, do cyfry odczytanej z wrzecionka dodajemy 50. Mierząc przedmiot, wrzecionko możemy tylko dokręcać pokrętle D , które obraca się poprzez sprzęgło wyłączające obrót śruby przy nadmiernym docisku, a tym samym zabezpieczające gwint wrzecionka.



3.3. Mikromierz.

Przed przystąpieniem do pomiarów, należy sprawdzić wskazanie zerowe po doprowadzeniu do zetknięcia szczęk $A B$. Gdy mikromierz nie wskazuje wtedy „zera”, należy odczytać wskazanie i zależnie od znaku dodawać lub odejmować od wskazań uzyskanych w pomiarach.

Czujnik mikrometryczny (rys. 3.4) służy przede wszystkim do pomiaru zmian długości. Zachodzące wzdłuż kierunku x przesunięcie suwaka S przenosi się za pomocą układu kół zębatach na dwie wskazówki $W1$ i $W2$, z których jedna $W1$ wykonuje pełen obrót przy przesunięciu suwaka o 1 mm, a druga $W2$ przy przesunięciu o 10 mm. Sprężyna dociska suwak w dolne skrajne położenie (rys. 3.4). Obwód tarczy czujnika podzielony jest na 100 części i zmiany długości można mierzyć z dokładnością do 0,01 mm. Skalę $S1$ można obracać zmieniając w ten sposób położenie punktu zerowego.



3.4. Czujnik mikrometryczny.

Pomiar kąta sprowadza się również do pomiaru długości. Zgodnie z definicją, kąt jest stosunkiem łuku koła do promienia i jego pomiar sprowadza się do pomiaru tych dwóch wielkości. Dotąd niemal wyłącznie stosowana jest skala stopniowa, w której

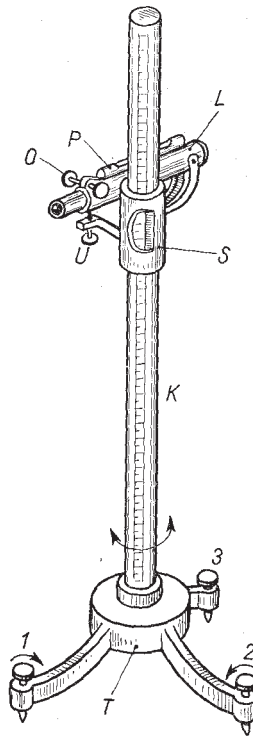
pełen kąt płaski podzielony jest na 360° (stopni kątowych), każdy stopień na 60 minut ($60'$), a minuta na 60 sekund stopniowych ($60''$). Do bezpośredniego pomiaru kąta służą *kątomierze*, które w przypadku, gdy wymagana jest duża dokładność odczytu kąta mogą być również zaopatrzone w noniusz.

Stosując kątomierze wzorcowane w stopniach kątowych należy każdorazowo przeliczyć kąt na jednostki miary łukowej. W tym przypadku najpierw trzeba zamienić minuty i sekundy kątowe na dziesiętne i setne części stopnia, a następnie zamienić jednostki według wzoru

$$1 \text{ rad} = 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 44,8'' . \quad (3.2)$$

3.2. KATETOMETR

Katetometr jest przyrządem, który pozwala dokładnie mierzyć odległości pionowe, względnie przesunięcia pionowe w pewnej, nieraz znacznej odległości. Składa się on (rys. 3.5) z osadzonego na trójnogu *T* statywu *K* zaopatrzonego w pionową skalę.



3.5. Katetometr.

Statyw może obracać się wokół osi pionowej. Po statywie przesuwa się suwak *S* zaopatrzony w noniusz. Do suwaka zamocowana jest lunetka *L* zaopatrzona w krzyż z nici pajęczych. Nóżki statywu zaopatrzone są w śruby regulujące 1, 2, 3, które pozwalają na regulację ustawienia w pionie. Lunetka posiada poziomnicę *P*, urządzenie *U* pozwalające na obrót wokół osi prostopadłej do statywu. Ponadto zaopatrzona jest ona

w urządzenie O do przesuwania okularu, a tym samym do regulacji ostrości widzenia mierzonego przedmiotu.

Przed przystąpieniem do pracy katetometr trzeba ustawić dokładnie pionowo, a lunetkę poziomo. W tym celu lunetkę ustawiamy w jednej płaszczyźnie z nóżką 3 i doprowadzamy pęcherzyk w poziomnicy w środkowe położenie za pomocą śruby 3 oraz U ; staramy się przy tym, by obrót każdej ze śrub przesunął pęcherzyk o połowę drogi. Obracamy statyw o π (pół obrotu) i powtarzamy te same regulacje. Po kilkakrotnym powtórzeniu tych czynności lunetka będzie spoziomowana w płaszczyźnie wyznaczonej statywem i nóżką 3 . Następny etap polega na wypoziomowaniu katetometru w płaszczyźnie prostopadłej do poprzedniej. W tym celu obracamy statyw o $1/4$ obrotu ($\frac{\pi}{2}$). Poziomnica wykaże brak pionowego ustawienia. Nie ruszając śrub 3 i U sprowadza-

my pęcherzyk do środkowego położenia wyłącznie za pomocą śrub 1 i 2 . Celem uniknięcia rozregulowania poprzedniego ustawienia w płaszczyźnie $(3, K)$, śruby 1 i 2 musimy obracać zawsze równocześnie o taki sam kąt, lecz w przeciwnych kierunkach (obydwie do środka jak zaznaczono na rysunku lub obydwie na zewnątrz), do chwili gdy pęcherzyk poziomicy znajdzie się w środkowym położeniu. Po osiągnięciu tego stanu przyrząd jest wypoziomowany i przy obrocie statywu o dowolny kąt pęcherzyk pozostaje w środkowym położeniu. Jednak przy niewystarczającej wprawie ćwiczącego może się okazać, że ustawienie w dalszym ciągu jest nieprawidłowe. Wtedy lunetkę ustawiamy na powrót w płaszczyźnie $(3, K)$ i powtarzamy wszystkie czynności.

Niektóre typy katetometrów posiadają wbudowane poziomnice w statywie lub zaopatrzone są w pion. Ustawienie takich katetometrów jest prostsze. Ustawiamy wtedy trójnóg, a następnie lunetkę. Istnieją również katetometry uproszczone, w których brak noniusza, a lunetkę zastępuje się celownikiem lub wskazówką.

Pomiar polega na zgraniu przecięcia nici pajęczych z określonym punktem przedmiotu mierzonego, odczytaniu położenia lunetki na skali statywu. Gdy mierzymy długość, nastawiamy lunetkę na drugi koniec mierzonego przedmiotu i odczytujemy ponownie. Mierzona wielkość jest równa różnicy obydwu wskazań.

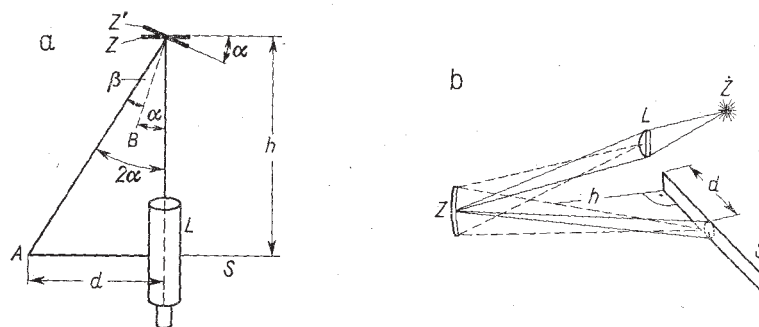
3.3. POMIAR KĄTÓW LUB ZMIAN DŁUGOŚCI METODĄ OPTYCZNĄ

Dokładność pomiaru kąta zależy od promienia koła, na którego obwodzie mierzymy kąt lub długość łuku. Ramion tych nie można przedłużać nieograniczenie, ponieważ związana jest z tym zmiana masy urządzenia, jego wymiary itp. Można jednak długość ramion przedłużyć nieograniczenie za pomocą wiązki światła. Urządzenia służące do tego celu pokazano na rysunku 3.6. Rysunek 3.6a przedstawia urządzenie składające się z lunety L , skali S oraz zwierciadła Z , znajdującego się na osi urządzenia, którego kąt obrotu mamy zamiar mierzyć. Układ ustawiamy w ten sposób, by nić pajęcza w lunecie pokrywała się z punktem zerowym skali S . Po obrocie urządzenia, a wraz z nim zwierciadła o kąt α , w lunecie widzimy działkę skali odległą o d od położenia zerowego, a kąt AZL wynosi 2α . Ponieważ kąt BZL i kąt pomiędzy położeniem Z i Z' zwierciadła posiadają ramiona zgodnie prostopadłe, a kąt $\beta = \alpha$ zgodnie z prawem odbicia, linia BZ' jest prostopadła do powierzchni zwierciadła w położeniu Z' . Za pomocą

opisanego tu urządzenia mierzymy zazwyczaj kąty małe i możemy przyjąć, że d jest równe długości łuku odpowiadającego kątowi 2α . Wtedy $2\alpha = \frac{d}{n}$ lub

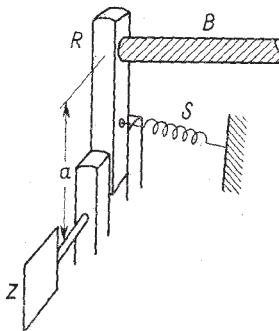
$$\alpha = \frac{d}{2h}. \quad (3.3)$$

Urządzenie pokazane na rysunku 3.6a nie jest jednak praktyczne, ponieważ wymaga ciągłej obserwacji skali przez lunetę, co przy dłuższych obserwacjach jest męczące. Na rysunku 3.6b pokazano tzw. urządzenie z plamką świetlną, za pomocą którego na przezroczystej skali S widzimy wprost plamkę świetlną z nicią pajęczą rzutowaną za



3.6. Urządzenia do optycznego odczytywania kątów.

pomocą odpowiedniego układu optycznego składającego się z soczewki L związanej na stałe z żarówką Z oraz zwierciadła Z , które w tym przypadku jest wklęsłe i jest częścią układu optycznego. Układ można również skonstruować w taki sposób, by nie było konieczne zwierciadło wklęsłe. Dla urządzenia z rys. 3.6b kąt wyraża się również wzorem (3.3).



3.7. Urządzenia do optycznego pomiaru wydłużenia.

Układ pokazany na rysunku 3.6 można zastosować również do pomiaru zmian długości, co pokazano na rysunku 3.7. Do belki B , której zmiany długości Δl mierzymy, jest dociskane ramię R za pomocą sprężyny S . Mierzimy kąt α , o który obróci się zwierciadło Z . W tym przypadku kąt $\alpha = \Delta l/a$, zatem zgodnie z wzorem (3.3) otrzymamy

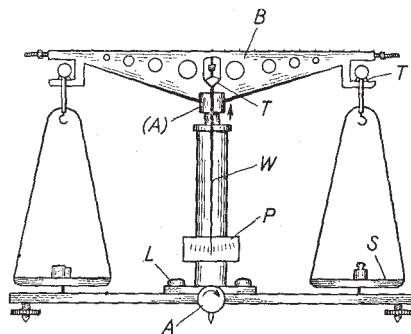
$$\Delta l = \frac{ad}{2h}. \quad (3.4)$$

3.4. POMIARY MASY LUB CIĘŻARU

Do pomiaru masy lub ciężaru służą wagi. Czynności związane z pomiarem nazywamy ważeniem. Ze względu na zasadę działania wagi dzielimy na belkowe, sprężynowe i tor-syjne.

a. Budowa i działanie wag belkowych. Waga belkowa jest przyrządem służącym do porównywania ciężaru ciał. Ze względu na stałość przyspieszenia ziemskiego może ona służyć również do porównywania mas, bowiem z równości ciężarów dwóch ciał $m_1g = m_2g$, wynika równość ich mas $m_1 = m_2$.

Waga belkowa jest dźwignią dwustronną, w której punkt podparcia znajduje się powyżej środka ciężkości (rys. 3.8). Najważniejszymi częściami wagi są: belka B , szalki S , wskazówka W , skala P , urządzenie do unieruchomienia wagi czyli aretowania A , oraz pion względnie poziomica L . Belka i szalki wsparte są na ostrzach pryzmatów co ogranicza do minimum wpływ tarcia i pozwala na dokładne określenie długości ramion. Ostrza wszystkich pryzmatów leżą na jednej płaszczyźnie.



3.8. Waga belkowa: B — belka, S — szalka.

Wartość użytkową wagi określają dwa parametry: dokładność i czułość. *Dokładność* wagi określamy jako wartość najmniejszej podziałki (odważnika). *Czułość* C wagi nazywamy stosunek wychylenia wskazówki do obciążenia, przez które wychylenie to zostało spowodowane

$$C = \frac{\Delta\alpha}{\Delta m}. \quad (3.5)$$

Często kąt α zastępuje się wskazaniem A na skali

$$C = \frac{\Delta A}{\Delta m}. \quad (3.6)$$

Ze względu na dokładność wagi dzielimy na laboratoryjne, których dokładność osiąga co najwyżej 0,01 g oraz analityczne o dokładności ważenia 0,1 mg. Wagi analityczne wykonane są bardzo precyzyjnie i zamknięte są w oszklonej szafce. Pryzmaty tych wag wykonane są z agatu.

Celem zbadania wpływu różnych czynników na czułość wagi, założmy, że nie jest ona dokładnie zrównowazona i belka jest wychylona z położenia równowagi o kąt α (rys. 3.9). Na belkę działają następujące momenty sił ważonego ciała ($r_1 mg \cos \alpha$),

odważników ($-r_2(m+\Delta m)g \cos \alpha$) oraz moment siły związany z ciężarem belki ($S m_B g \sin \alpha$). Przez S oznaczono odległość środka ciężkości belki od punktu podparcia, a przez m_B masę belki. W przypadku równowagi trwałej suma tych wszystkich momentów musi się równać zero

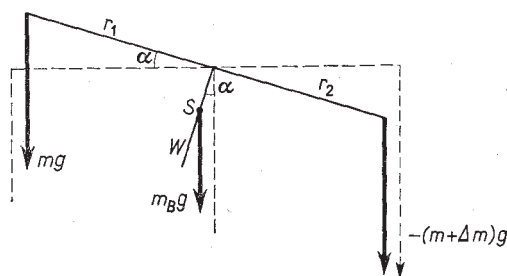
$$r_1 m g \cos \alpha - r_2 m g \cos \alpha - r_2 \Delta m g \cos \alpha + S m_B g \sin \alpha = 0.$$

Gdy założymy, że ramiona belki są równe ($r_1 = r_2 = r$), to po prostych przekształceniach ostatni wzór przyjmie postać

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \Delta m}{S m_B}.$$

Zakładając ponadto, że wychylenia są za małe ($\operatorname{tg} \alpha \simeq \alpha$) oraz uwzględniając definicję czułości (3.5) otrzymamy

$$C = \frac{r}{S m_B}. \quad (3.7)$$



3.9. Siły działające na nierównoważoną wagę.

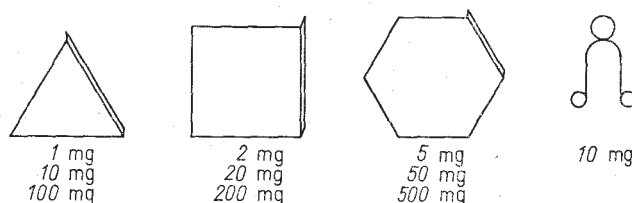
Czułość wagi jest więc proporcjonalna do długości ramion, a odwrotnie proporcjonalna do odległości między punktem podparcia i środkiem ciężkości oraz odwrotnie proporcjonalna do masy belki. Konstruktor dobiera optymalne wartości wszystkich tych parametrów. Obecnie konstruowane wagi posiadają stosunkowo krótką, ażurową belkę, wykonaną z lekkich, odpornych mechanicznie stopów aluminium.

Jeżeli w obciążonej wadze belka ugina się, wtedy następuje zmiana odległości S punktu podparcia od środka masy belki, a tym samym zmienia się czułość wagi (por. wzór 3.7). Stąd dla każdej wagi określa się maksymalne obciążenie, przy którym belka się nie deformuje. Po przekroczeniu maksymalnego obciążenia wyniki ważenia są błędne, a przy znacznym przeciążeniu może nastąpić uszkodzenie wagi*.

Odważniki są wzorcem, z którym porównujemy masę ważonego ciała (rys. 3.10). Komplet zawierający odważniki od 0,1 g (do 200 lub 500 g) nazywamy *odważnikami laboratoryjnymi*. Komplet zawierający odważniki od 100 g do 1 mg nazywamy *odważnikami analitycznymi*. Odważniki od 0,5 g do 1 mg wykonane są w postaci blaszek, a jeden odważnik 10 mg zwany konikiem wykonany jest z drutu (rys. 3.10). Do nakładania odważników służą specjalne szczypce — penseta.

* Chcąc uzyskać poprawny wynik ważenia ciała o małej gęstości, musimy uwzględnić poprawki na wypór powietrza omawiane w § 5.01.

b. Wążenie za pomocą wagi laboratoryjnej. Ustawienie wagi sprawdzamy na poziomnicy umieszczonej w podstawie wagi, lub za pomocą tzw. pionu czyli ciężarka z ostrzem zawieszzonego na nici w górnej części podstawy belki. W poziomo ustawionej wadze pęcherzyk powietrza powinien znajdować się wewnątrz kółka zaznaczonego na szkiełku poziomnicy. W przypadku pionu ostrze ciężarka musi znajdować się dokładnie naprzeciw ostrza umieszczonego w podstawie wagi. Możemy poprawić ustawienie wagi przez pokręcanie dwóch przednich nóżek, pokręcając nimi równocześnie w przeciwnych kierunkach.



3.10. Kształty odważników miligramowych.

W poziomowanej wadze sprawdzamy położenie zerowe. W tym celu najpierw sprawdzamy czystość szalek, po czym zwalniamy belkę i odczytujemy środek wahań. Jeżeli nie znajduje się on w pobliżu zera skali, przesuwamy w prawo lub w lewo środek ciężkości belki przez pokręcenie jednej z poziomo ustawionych śrub, znajdujących się na końcach ramion lub w środkowej części belki.

Czynności związane z ważeniem są najprostsze w przypadku, gdy wymagana dokładność pomiaru nie przekracza masy najmniejszego odważnika np. 0,1 g. W czasie nakładania ciała lub odważników, belka musi być unieruchomiona. Pokrętko służące do unieruchomienia obracamy powoli i płynnie. Wążone ciało umieszczamy na lewej, a odważniki na prawej szalce. Odważniki nakładamy metodą prób, którą wyjaśniamy na przykładzie.

Przykład. Gdy oceniamy, że ciało waży ok. 20 g, nakładamy odważnik 20 g. Jeżeli ten okaże się za duży, zastępujemy go odważnikiem 10 g. Jeśli to nie wystarczy dodajemy 5 g. Postępując w ten sposób dochodzimy do sytuacji, w której dodanie odważnika 1 g spowoduje przejście wskazówki przez zero, czyli powstanie nadwagi. Wtedy odważnika tego już nie dodajemy, lecz zaczynamy w podobny sposób dobierać odważniki o masie od 0,1 do 0,5 g. Jako wynik ostateczny przyjmujemy taki przypadek, w którym środek wahań znajduje się stosunkowo najbliższe położenia wyjściowego zanotowanego przed pomiarem.

Należy podkreślić, że w przypadku gdy dobieramy nie masę odważników, lecz ilość substancji, a więc np. wtedy, gdy musimy odważyć 1 g cukru, dokładność odczytu wynosi również przynajmniej 0,1 g, mimo że nie stosujemy odważników ułamkowych od 0,1 do 0,5 g.

c. Interpolacja. Metodę interpolacji stosujemy zawsze wtedy, gdy wymagana dokładność pomiaru musi przekroczyć wagę najmniejszego odważnika. W omawianej metodzie kolejne miejsca znaczące określamy z wychyleń wskazówki.

W tym przypadku rozpoczynamy od dokładnego wyznaczenia położenia zerowego. Po zwolnieniu belki, kąt wychyleń nie ustala się natychmiast. Występują wahania (rys. 3.11) o malejącej amplitudzie (drżania tłumione), które pokazuje nam wskazówka. Ze względu na przypadkowe drżania stołu, ruchy powietrza itp. amplituda tych drgań praktycznie nigdy nie spada do zera. Jako położenie równowagi